PUNKTIŅŠ (B grupa) Sakārtosim, novērtēsim

19.01.2018

Īsi atrisinājumi un komentāri

Piezīme. Nodarbības tēma ir Dirihlē principa pielietojums. Gatavojoties Novada Matemātikas Olimpiādei, skolēniem ir jātrenējas matemātiski precīzi pamatot izteiktos apgalvojumus.

1. Pierādi, ja izvēlas 51 dažādus naturālus skaitļus, kas mazāki par 100, var atrast divus tādus, kuru summa ir vienāda ar 100.

Atrisinājums. Pieņemsim, ka var izvēlēties 51 tādu skaitli, kur nekādu divu skaitļu summa nav 100. Aplūkosim sekojošus skaitļu pārus (1; 99), (2; 98), ….(49; 51). Ir 49 pāri, kur skaitļu summa ir 100. Atsevišķi vēl paliek skaitlis 50. Tad kopumā ir 50 dažādas grupiņas. Ja starp izvēlētajiem skaitļiem nav divu tādu, kuru summa ir 100, tad no katras grupiņas ir izvēlēts ne vairāk kā viens skaitlis un lielākais izvēlēto skaitļu skaits var būt ne lielāks kā 50. Pretruna.

2. 31 konfekte ir jāsaliek vairākās kastītēs. Nevienā kastītē nevar ielikt vairāk kā 9 konfektes. Kā sadalīt konfektes,

a) lai būtu jāizmanto pēc iespējas mazāk kastīšu un katrā kastītē būtu citāds konfekšu skaits?

b) pierādi – ja izmanto vairāk kastīšu, nekā ir noteikts a) gadījumā un kastītēs ir atšķirīgs konfekšu skaits, tad atradīsies kādas divas kastītes, kurās konfekšu skaita summa ir 11.

Atrisinājums.

a) Ja 31 konfekte jāsadala pa kastītēm, kur vairāk kā 9 ielikt nevar, tad ir nepieciešamas vismaz 4 kastītes, jo trīs kastītēs kopumā var ielikt lielākais 27 konfektes. Lai katrā kastītē būtu dažāds konfekšu skaits un mēs izmantotu pēc iespējas mazāk kastīšu, tad tajās jāliek cik vien iespējams liels konfekšu skaits. Ja summē lielākos skaitļus, tas ir, $9 + 8 + 7 + 6 = 30$, tad redzam, ka mazākais kastīšu skaits ir 5. Var izveidot dažādus komplektus, piemēram, kastītes, kur konfekšu skaits ir 9, 8, 7, 6 un 1.

Piezīme. b) gadījumā grupu jeb "būrīšu" konstrukcija ir līdzīga kā pirmajā uzdevumā.

b) Ir jāizmanto vismaz 6 kastītes, kur katrā no tām ir atšķirīgs konfekšu skaits. Ir četri skaitļu pāri, kuru summa ir 11, tie ir (9; 2), (8; 3), (7; 4) un (6; 5). Vēl ir arī skaitlis 1. Tad kopumā var aplūkot šīs 5 grupas. Ja sešus vai vairāk dažādus skaitļus sakārto atbilstoši šīm grupām, tad vismaz vienā pārī atgadīsies abi skaitļi, tas ir, konfekšu skaits abās atbilstošajās kastītēs būs 11.

3. Katram no 4 zēniem ir sīknauda. Vai var gadīties, ka diviem zēniem ir vienāds naudas daudzums, ja

a) dažas no zēnu naudas starpībām ir 1, 3 un 5 centi un nevienam no zēniem nav vairāk kā 6 centi;

b) dažas no zēnu naudas starpībām ir 2, 3 un 5 centi un nevienam no zēniem nav vairāk kā 7 centi?

Atrisinājums.

a) Pieņemsim, ka diviem zēniem ir vienāds naudas daudzums. Tad trim zēniem katram ir citāds naudas daudzums, ko apzīmēsim $a, b, c,$ un pieņemsim, ka $a < b < c$.

Tad lielāko iespējamo starpību 5 var iegūt tikai vienā veidā, ja $a = 1$, bet $c = 6$. Lai atrastu b vērtību, jāaplūko divas iespējas, ko var aprakstīt ar vienādojumu sistēmām

$$\begin{cases} b = a + 1 \\ b = c - 3 \end{cases} \quad \text{vai} \quad \begin{cases} b = a + 3 \\ b = c - 1 \end{cases}$$

Saskaitot vienādojumus iegūstam $2b = 7 - 2 = 5$ vai $2b = 7 + 2 = 9$. Tāpēc nevienai sistēmai nav iegūstams atrisinājums veselos skaitļos.

Ievērojot, ka diviem zēniem noteikti ir 1 cents un 6 centi, pārējiem diviem zēniem var būt jebkura divu skaitu kombinācija no skaitļiem 2, 3, 4, 5. Tāpēc kopumā iespējami 6 dažādi naudas sadalījumi.

b) Šis gadījums ir iespējams. Trīs zēniem var būt 2, 3 un 7 centi (vai arī 1, 3, un 6 centi), ceturtajam zēnam naudas daudzums var sakrist ar jebkuru no minētajiem.

4. Klasē ir 30 skolēni. Jurītis matemātikas kontroldarbā ielaida 13 kļūdas. Nevienam citam skolēnam nebija tik daudz kļūdu. Pierādiet, ka vismaz trim skolēniem bija vienāds kļūdu skaits (varbūt nebija nevienas kļūdas)!

Atrisinājums. Divdesmit deviņiem skolēniem var būt 0, 1, 2, … 12 kļūdas vienā darbā, tas ir, pavisam iespējami 13 kļūdu skaita varianti jeb 13 grupas. Katru no skolēniem atzīmēsim atbilstošajā grupā. Pieņemsim, ka katrā grupā atzīmēti ne vairāk kā divi skolēni. Tad kopējais skolēnu skaits ir ne lielāks par 26, kas ir pretrunā ar doto. Tāpēc (saskaņā ar Dirihlē principu) kādā no grupām ir atzīmēti vismaz 3 skolēni. Tas nozīmē, ka vismaz 3 skolēniem ir vienāds kļūdu skaits.

5. Zu – Zu planētas iedzīvotājiem katram ir 4 rokas. Pludmalē satikās 9 bērni un vienlaikus katrs sarokojās ar 4 saviem draugiem (katram draugam pasniedza tikai vienu roku). Pierādiet, ka bija kādi 3 Zu – Zu bērni, kas savstarpēji viens otram paspieda roku!

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo - nekādi 3 draugi nesarokojās visi savā starpā. Apskatīsim vienu bērnu A un četrus viņa draugus. Atbilstoši pieņēmumam, bērna A draugi savā starpā nedraudzējas. Tad katram no viņiem ir vēl 3 draugi. Tad pārējo četru bērnu, kuri nav A draugi (nosauksim viņus B, C, D, E), virzienā ir pasniegtas kopumā 12 rokas. Pēdējiem četriem bērniem B, C, D, E kopumā ir 16 rokas, no kurām A draugu virzienā atbilstoši arī ir pastieptas 12 rokas. Skaitli 12 var izteikt kā četru skaitļu summu

$$12 = 3 + 3 + 3 + 3 \quad \text{vai} \quad 12 = 4 + 3 + 2 + 3.$$

Ja pieņemam, ka arī bērnu B, C, D, E starpā nav 3 savstarpēju draugu, tad citas skaitļa 12 summas neapmierina uzdevuma nosacījumus (uzzīmē visas iespējamās situācijas shematiski!). Tāpēc iespējami divi gadījumi, kur draugi ir, piemēram, B un C un otri D un E. Vai arī C draudzējas ar B un D, bet E draudzējas tikai ar bērna A draugiem. Pirmajā gadījumā draugiem B un C katram ir 3 draugi no visiem četriem bērna A draugiem. No tā seko, ka B un C ir kopīgi vismaz 2 draugi, kas arī veido šo 3 savstarpējo draugu kopu. Otrā gadījumā C ir 2 draugi no A draugiem, bet B ir 3 draugi no tiem. Tāpēc viņiem ir vismaz viens kopīgs draugs no A draugu grupas, kas arī veido savstarpējo draugu trijnieku. Esam ieguvuši pretrunu mūsu pieņēmumam.

6. Doti 12 divciparu skaitļi. Pierādiet, ka starp tiem var izvēlēties divus tādus skaitļus, ka to starpība ir tāds divciparu skaitlis, kurā abi cipari vienādi!

Atrisinājums. Skaitļi, kuru abi cipari ir vienādi ir 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, tas ir – tie dalās ar 11. Apskatīsim divus skaitļus A un B un pieņemsim, ka A > B. Divciparu skaitli var izteikt formā A = $11k + n$. Divu skaitļu A un B starpība dalīsies ar 11, ja B var izteikt B = $11m + n$. Citiem vārdiem sakot, skaitļus A un B dalot ar 11, to atlikumi ir vienādi. Starpība A – B = $11k + n - (11m + n) = 11(k - m)$, dalās ar 11.
Skaitļus, dalot ar 11, ir iespējami 11 dažādi atlikumi (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10). Dotos 12 skaitļus var iedalīt 11 atlikumu grupās. Tad, saskaņā ar Dirihlē principu, vismaz vienā grupā būs vismaz divi skaitļi. To starpība dalīsies ar 11.