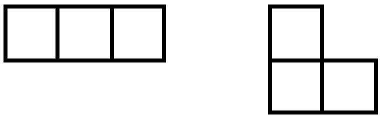
PUNKTIŅŠ (B grupa) Rūtiņu figūru pārklāšanās

19.01.2018

Īsi atrisinājumi un komentāri.

Par “**stienīti**” nosauksim 3 rūtiņu figūru, kas veido taisnstūri *3 x 1* rūtiņa. Otru 3 rūtiņu figūru sauksim par “**leņķīti**”.

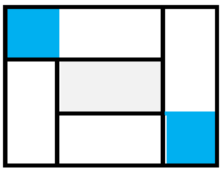


1. Gar rūtiņu taisnstūra malu ir jāizveido rāmītis – visas malējās rūtiņas jāpārklāj ar stienīšiem tā, ka katram stienītim tieši viena rūtiņa pārklājas ar viena cita stienīša rūtiņu. a) Nosaki taisnstūra *3 x n* platumu *n*; b) nosaki taisnstūra *n x m* iespējamos izmērus!

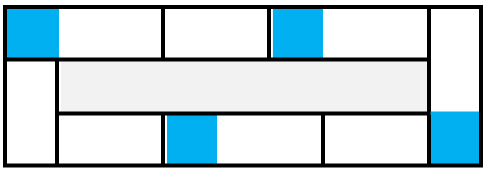
Piezīme. Uzdevuma mērķis ir atklāt figūru izvietojuma īpašības un aprakstīt tās ar vispārīgu formulu

Atrisinājums.

a) Lai izveidotu rāmīti, taisnstūra abos galos jābūt vertikālam stienītim. Vismazākais rāmītis veidots no 4 stienīšiem (skat. 1. zīm.). Lai rāmīti pagarinātu, tam jāpievieno horizontāli novietoti stienīši, kurpretim taisnstūra galos stienīšu konfigurācija ir noteikta. Vispārīga šādu taisnstūru izmērs ir *3 x (4 + 5 n)*. Piemērs gadījumam, kad *n = 1*, dots zīmējumā 2.



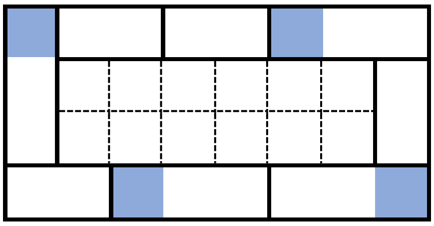
1. zīmējums



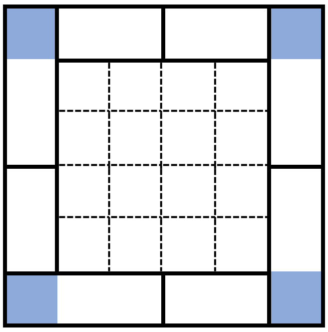
2. zīmējums

b) Rāmīša vienas malas garums var būt jebkurš vesels skaitlis lielāks par 2. Ievērojot, ka jebkuru izveidotā rāmīša garumu vai platumu var palielināt par 5, pietiek parādīt, kā izveidot tādus rāmīšus, kuru garums ir 3, 4, 5, 6 vai 7 rūtiņas. Rāmīša platums ir atkarīgs no tā garuma. Mazākais rāmītis, kura izmērs var būt *(3 + 5n) x (4 + 5k)*, redzams zīmējumā 1, kur *n = k = 0*.

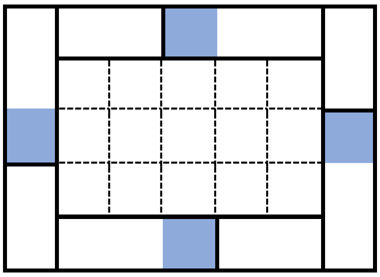
Rāmītis, kura vispārīgā formula ir $(4+5n) \times (3+5k)$, ja $n = 0$ un $k = 1$:



Rāmītis, kura vispārīgā formula ir $(6+5n) \times (6+5k)$, ja $n = k = 0$:

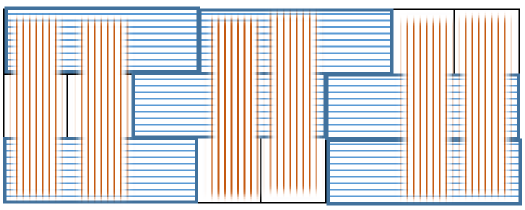


Rāmītis, kura vispārīgā formula ir $(7+5n) \times (5+5k)$, ja $n == k = 0$:



2. Taisnstūri ar izmēru 3×8 pārklāj pilnībā ar stienīšiem tā, ka katram stienītim tieši divas rūtiņas pārklājas ar diviem citiem stienīšiem!

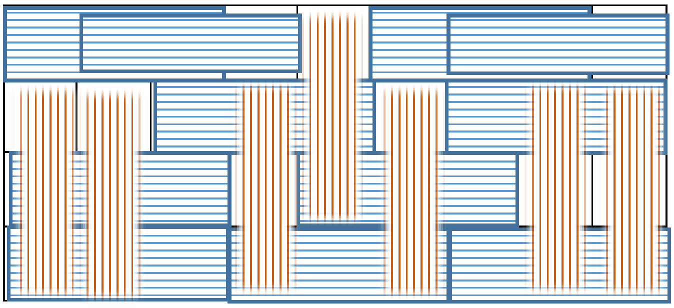
Atbildes piemērs:



Komentārs. Papildus var aprēķināt, cik stienīši nepieciešami šādam pārklājumam. Stienīšu kopējais skaits ir n. Katrs stienītis pārklāj 3 rūtiņas. Katram stienītim tieši 2 rūtiņas pārklājas ar diviem citiem stienīšiem, no kā var spriest, ka ir $2n$ taisnstūra rūtiņas, kuras pārklātas ar diviem stienīšiem. Taisnstūra rūtiņu skaits ir 24. Stienīši kopumā pārklāj $3n - n$ rūtiņas. Iegūstam $3n - n = 24$ jeb $n = 12$ stienīši.

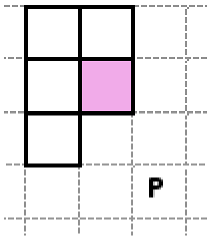
3. Taisnstūri ar izmēru *4 x 9* rūtiņas pārklāj pilnībā ar stienīšiem, kur katram stienītim tieši 2 rūtiņas ir pārklātas ar ne vairāk kā diviem citiem stienīšiem un pārklājumā ir vismaz viens vertikāli novietots stienītis un vismaz viens horizontāli novietots stienītis!

Atbildes piemērs:



4. Noklāj taisnstūri ar izmēru *4 x 5* rūtiņas ar leņķīšiem tā, ka katram leņķītim pārklājas viena rūtiņa ar citu leņķīti!

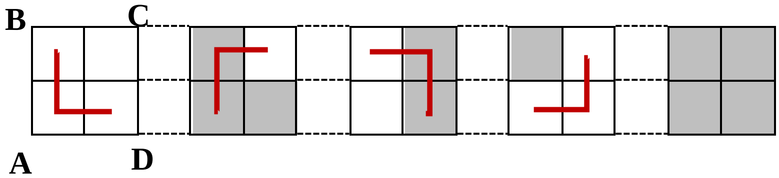
Atrisinājuma ideja: izveidojam taisnstūrveida bloku ar izmēru *2 x 5* rūtiņas. Izmantojot 4 leņķīšus te novieto divas P – veida konfigurācijas:



Doto taisnstūri pārklājam ar četriem šādiem blokiem. Taisnstūri pārklāt ar leņķīšiem, protams, var arī citādi.

5. Taisnstūrī ar izmēru *2 x 3* rūtiņas ir viena melna rūtiņa. Ja uz taisnstūra uzliek leņķīti, tad pārklātās rūtiņas maina krāsu uz pretējo. Vai ar vairākām darbībām var panākt, ka taisnstūra rūtiņas visas ir vienā krāsā?

Atrisinājums. Aplūkosim kvadrātu ABCD ar izmēru *2 x 2* rūtiņas. Pieņemsim, ka tas ir baltā krāsā. Novietojot leņķīti pēc kārtas katrā no stūrim A, B, C un D, kvadrāta rūtiņas būs melnā krāsā:



Šis rūtiņu pārkrāsošanas princips parāda, ka ar leņķīša palīdzību jebkuru krāsojumu, kur taisnstūra rūtiņas krāsotas divās krāsās, var pārveidot vienā krāsā. Dotajā taisnstūrī izvēlas tādu kvadrātiņu *2 x 2*, kura rūtiņas ir jāpārkrāso, un veic norādītās darbības. Vajadzīgās krāsas rūtiņu skaits būs palielinājies par 1, 2, 3 vai 4 rūtiņām (atkarībā no tā, cik rūtiņas jāpārkrāso). Tad izvēlas nākamo kvadrātiņu, kuru jāpārkrāso un tā turpina, līdz krāsošana paveikta.

6. Kvadrāta ar izmēru 3×3 rūtiņas ir melnā krāsā. Vai veicot tādas pašās darbības kā iepriekšējā uzdevumā, var panākt, ka visas rūtiņas baltas?

Piezīme. Skatīt iepriekšējā uzdevuma atrisinājumu.

7. Trīs no kvadrāta ar izmēru 4×4 rūtiņām ir nokrāsotas zilā krāsā, pārējās – baltā. Uzliekot uz laucina stienīti ar izmēru 4×1 rūtiņa, visas pārklātās rūtiņas maina krāsu uz pretējo (zilās rūtiņas kļūst baltas, bet baltās – zilas). Vai veicot šīs darbības atkārtoti, var panākt, ka visas kvadrāta rūtiņas kļūst baltas?

Atrisinājums. Izpētīsim, kādas pārmaiņas notiek vienas darbības rezultātā. Uzliekot stienīti uz kvadrāta, tas var pārklāt vienu, divas, trīs vai kādā brīdi pat 4 zilās rūtiņas. Pieņemsim, ka zilo rūtiņu skaits ir n, bet balto k. Apskatīsim sīkāk minētos gadījumus:

a) Stienītis pārklāj 1 zilo un 3 baltās rūtiņas, tad rūtiņu skaits ir

$n - 1 + 3 = n + 2;$ $\qquad k - 3 + 1 = k - 2$

b) Stienītis pārklāj 2 zilās un 2 baltās rūtiņas, tad rūtiņu skaits ir

$n - 2 + 2 = n;$ $\qquad k - 2 + 2 = k$

c) Stienītis pārklāj 3 zilās un 1 balto rūtiņu, tad rūtiņu skaits ir

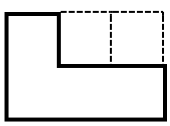
$n - 3 + 1 = n - 2;$ $\qquad k + 3 - 1 = k + 2$

d) Stienītis pārklāj 4 zilās rūtiņas, tad rūtiņu skaits ir

$n + 4;$ $\qquad k - 4$

Ievērosim, ka pie jebkuras darbības, rūtiņu skaits mainās par pāra skaitli, tātad saglabā sākotnējo paritāti. Zilo un balto rūtiņu skaits ir nepāra skaitlis (dots 3 un 13). Lai panāktu, ka kvadrāta visas rūtiņas ir baltas, jābūt 0 zilo rūtiņu, kas ir pāra skaitlis. Tāpēc uzdevumā prasīto situāciju panākt nevar.

8. Uz šaha dēlīša laucinjiem ir novietotas 15 figūras. Pierādi, ka uz dēlīša var atrast vismaz 4 tādus laucinus, kuri veido L veida apgabalu:



Atrisinājums ideja: Šaha dēlīti sadali 16 L veida apgabalos. 15 figūras var izvietoties uz ne vairāk kā 15 šādiem apgabaliem.