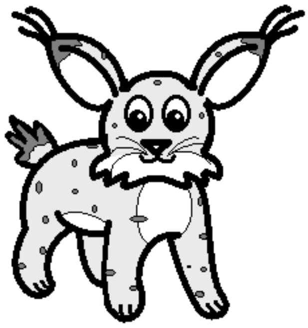
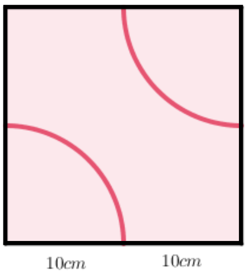


"Profesora Cipariņa klubs"
2017./2018. mācību gads

2. nodarbības uzdevumi

1. Meistars Dzintars

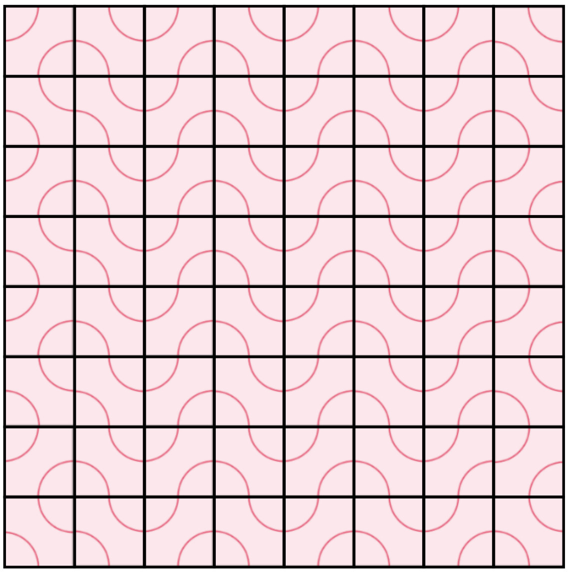
Šoreiz flīžu meistars Dzintars veic darbus Krūmiņu virtuvē. Viņam dotas 64 kvadrātiskas flīzes ar izmēriem 20×20 cm (skat. 1. att.), kuras jāizvieto pa 160×160 cm lielo virtuves grīdu. Mājas saimnieki vēlas, lai flīzes būtu izvietotas tā, lai iegūtu garāko iespējamo nepārtraukto sarkano liekto līniju. Kā Dzintaram jāizvieto flīzes, lai apmierinātu saimnieku vēlmes?
Kā Dzintaram būtu jārīkojas, ja Krūmiņu ģimene nolemtu līdzīgā veidā izflīzēt arī savas tualetes grīdu, kuras izmēri ir 1×1 m?



1. att.

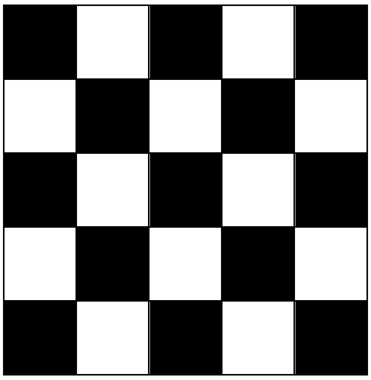
<u>Atrisinājums</u>

Tā kā virtuves izmērs ir 160×160 cm, flīzes būtu jāizkārto 8×8 kvadrātā. Visgarāko līniju iespējams iegūt, ja līnija caur katru rūtiņu iziet divas reizes. Ievērojam, ka malējām rūtiņām viena loka vismaz viens gals ieiet sienā, tāpēc tas nevar būt savienots ne ar vienu citu rūtiņu. Stūra flīzēm tie var būt viena loka abi gali, savukārt visām pārējām flīzēm – viens loka gals. Tātad tikai divās malējās flīzēs varēs izmantot abus lokus – viena flīze būs līnijas sākums, otra – tās beigas. Saskaitīsim, cik loki tiks izmantoti garākajai iegūstamajai līnijai: visām flīzēm, kas neatrodas pie malas, var izmantot abus lokus – tās pilnībā iekļaut rakstā – $2 \cdot 36 = 72$ loki; visām malējām flīzēm var izmantot tikai vienu no lokiem, izņemot sākumu un beigas, kopā: $28 + 2 = 30$ loki. Tātad garāko līniju var iegūt no $2 \cdot 36 + 28 + 2 = 102$ lokiem (skat. 2. att.).



2. att.

Otrajā gadījumā ar flīzēm jānoklāj 5×5 liels kvadrāts. Iekrāsosim šo laukumu kā šaha galdiņu. Iegūstam 13 melnus un 12 baltus laucinus:

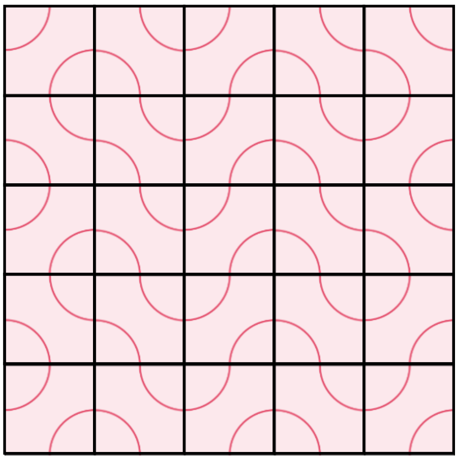


3.att.

Ievērosim, ka līnijas posmi pamīšus iet pa melnajiem un baltajiem laucinjiem. Lai iegūtu garāko iespējamo līniju, līnijai divreiz jāšķērso vidējie laucinji, vienreiz katrs malējais laucinjš, izņemot divus malējos laucinus, kur būs līnijas sākums un beigas. Tātad maksimālais skaits, cik reizes līnija varēs iet caur melnajiem laucinjiem ir 18 reizes un caur baltajiem laucinjiem 16 reizes (neskaitot līnijas sākumu un beigas). Apskatīsim trīs gadījumus atkarībā no tā, kādas krāsas laucinjā ir līnijas galapunkti.

- Ja abi līnijas galapunkti ir melnās krāsās laucinjos, tad kopā liektā līnija varētu iziet caur 20 melniem un 16 baltiem laucinjiem (caur dažiem laucinjiem divas reizes). Tā kā līnija iet pamīšus caur melnajiem un baltajiem laucinjiem, tās maksimālais garums var būt $17 + 16 = 33$ loki.
- Ja viens galapunkts ir baltā laucinjā, bet otrs – melnā laucinjā, tad kopā liektā līnija varētu iziet caur 19 melniem laucinjiem un 17 baltiem laucinjiem (caur dažiem laucinjiem divas reizes). Tā kā līnija iet pamīšus caur melnajiem un baltajiem laucinjiem, tās maksimālais garums var būt $17 + 17 = 34$ loki.
- Ja abi līnijas galapunkti ir baltajos laucinjos, tad kopā liektā līnija varētu iziet caur 18 baltiem un 18 melniem laucinjiem (caur dažiem laucinjiem divas reizes). Tā kā līnija iet pamīšus caur melnajiem un baltajiem laucinjiem, tās maksimālais garums var būt $18 + 17 = 35$ loki.

Tātad garākā iespējamā līnija sastāv no 35 lokiem. (skat. 4 .att.)



4. att.

2. Mandarīnu grozs

Ap milzīgu mandarīnu grozu pa apli stāv 1600 rūķīši. Viņi drīkst citiem iedot pa mandarīnam, bet paši sev nedrīkst ņemt. Rūķīši, kuriem kāds jau ir iedevis mandarīnu, nedrīkst cienāt citus ar mandarīniem. Lai tiktu pie kārotajiem augļiem, viņi vienojās par stratēģiju. Pirmais rūķītis iedeva mandarīnu otrajam, trešais – ceturtajam, piektais – sestajam utt. Kad 1599. rūķītis iedeva mandarīnu 1600. rūķītim, viņi turpināja apli – pirmais rūķītis iedeva mandarīnu 3. rūķītim, 5. rūķītis – 7. rūķītim utt. Tā katrs rūķītis aplī iedeva vienu mandarīnu nākamajam rūķītim, kuram vēl nav mandarīna (šo darbību viņi turpināja pa apli, nevis vienmēr sāka no pirmā rūķīša). Visbeidzot, tikai rūķītis ŅomŅoms palika bez mandarīna, tāpēc viņš pats to paņēma no groza. Kurš pēc kārtas bija ŅomŅoms?

Atrisinājums

1. atrisinājums

Pirmajā aplī visi pāra skaitļa rūķīši dabūja mandarīnu, palika rūķīši ar nepāra kārtas numuriem, ko var izteikt formā $2n + 1$, kur n – naturāls skaitlis.
Pēc otrā apļa palika rūķīši, kuru kārtas numurus var izteikt formā $4n + 1$.
Pēc trešā apļa –> $8n + 1$.
Pēc ceturtā apļa –> $16n + 1$.
Pēc piektā apļa –> $32n + 1$.
Pēc sestā apļa –> $64n + 1$.
Pēc septītā apļa –> $128n + 1$. Šie rūķīši ir: 1., 129., 257., 385., 513., 641., 769., 897., 1025., 1153., 1281., 1409., 1537.
Pēc astotā apļa bez mandarīniem palika rūķīši: 129., 385., 641., 897., 1153., 1409.
Pēc devītā apļa bez mandarīniem palika rūķīši: 129., 641., 1153.
Pēc desmitā apļa bez mandarīniem palika rūķīši: 129., 1153.
Pēc vienpadsmitā apļa bez mandarīniem palika rūķītis: 1153. Tātad ŅomŅoms pēc kārtas ir **1153.** rūķītis.

2. atrisinājums

Ievērojam, ja rūķīši ir 2, 4, 8, 16, 32 vai kādas citas divnieka pakāpes skaita (2^n, kur n – naturāls skaitlis), tad pirmais rūķītis, kurš sāks citus cienāt ar mandarīniem, vienmēr būs arī pēdējais rūķītis bez mandarīna. Skaitlim 1600 tuvākā divnieka pakāpe, kas ir mazāka nekā skaitlis 1600, ir $1024 = 2^{10}$. Tātad pirmais rūķītis, kurš kādam iedos mandarīnu, kad būs palikuši tieši 1024 rūķīši, arī būs meklētais ŅomŅoms.
Tad $1600 - 1024 = 576$ – tik rūķīši saņems mandarīnu, pirms ŅomŅoms kādam būs iedevis pirmo mandarīnu.
$576 \cdot 2 = 1152$ – 1152. rūķītis būs 576. rūķītis, kurš saņems mandarīnu. Tātad 1153. rūķītis būs pirmais rūķītis, kurš kādam iedos mandarīnu, kad būs palikuši tikai 1024 rūķīši. Tātad ŅomŅoms ir **1153.** rūķītis.

3. Starpbrīdis

Juris zināja, ka Andrim vismīļākā nodarbe ir risināt dažādus matemātikas uzdevumus, tāpēc, lai pārsteigtu un iepriecinātu viņu vārda dienā, Juris Andrim sagatavoja lielisku matemātikas uzdevumu:

> Dots, ka a, b un c – pozitīvi skaitļi un $abc = 1$.
>
> Pierādīt, ka
>
> $$\frac{a}{1+a+ab}+\frac{b}{1+b+bc}+\frac{c}{1+c+ca}=1$$

Atrisini arī Tu šo uzdevumu!

<u>Atrisinājums</u>

Pārveidojam vienādības kreiso pusi un izmantojam, ka $abc = 1$:

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=$$
$$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b\cdot a}{(bc+b+1)\cdot a}+\frac{c\cdot ab}{(ca+c+1)\cdot ab}=$$
$$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{abc+ab+a}+\frac{abc}{a\cdot abc+abc+ab}=$$
$$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{1}{a+1+ab}=$$
$$=\frac{a+ab+1}{ab+a+1}=1$$

Esam pierādījuši prasīto.

4. Gaidot aplausus

Tu sēdi kubiskā telpā ar aizsietām acīm. Pie katras telpas sienas ir slēdzis. Tavs mērķis ir panākt, lai visi četri slēdži ir vai nu ieslēgti, vai izslēgti. Tu nezini, kādā stāvoklī katrs no tiem ir sākumā. Vienā gājienā Tu vari pieskarties tikai diviem slēdžiem – noskaidrot, vai tie ir izslēgti vai ieslēgti, un izmainīt to stāvokli uz pretējo vienam, abiem vai nevienam slēdzim. Pēc katra gājiena Tu tiec vairākas reizes apgriezts ap savu asi tā, ka Tu vairs nezini, kuru sienu slēdžus Tu apskatīji iepriekš. Slēdžus un sienas nevar īpaši iezīmēt, lai atšķirtu nākamajos gājienos. Visi slēdži uz sienām ir izvietoti simetriski. Brīdī, kad visi slēdži ir vienādā stāvoklī, atskan aplausi.
Izdomā stratēģiju, kā panākt, lai visi slēdži būtu ieslēgti vai izslēgti! Šī stratēģija nedrīkst būt atkarīga no veiksmes.

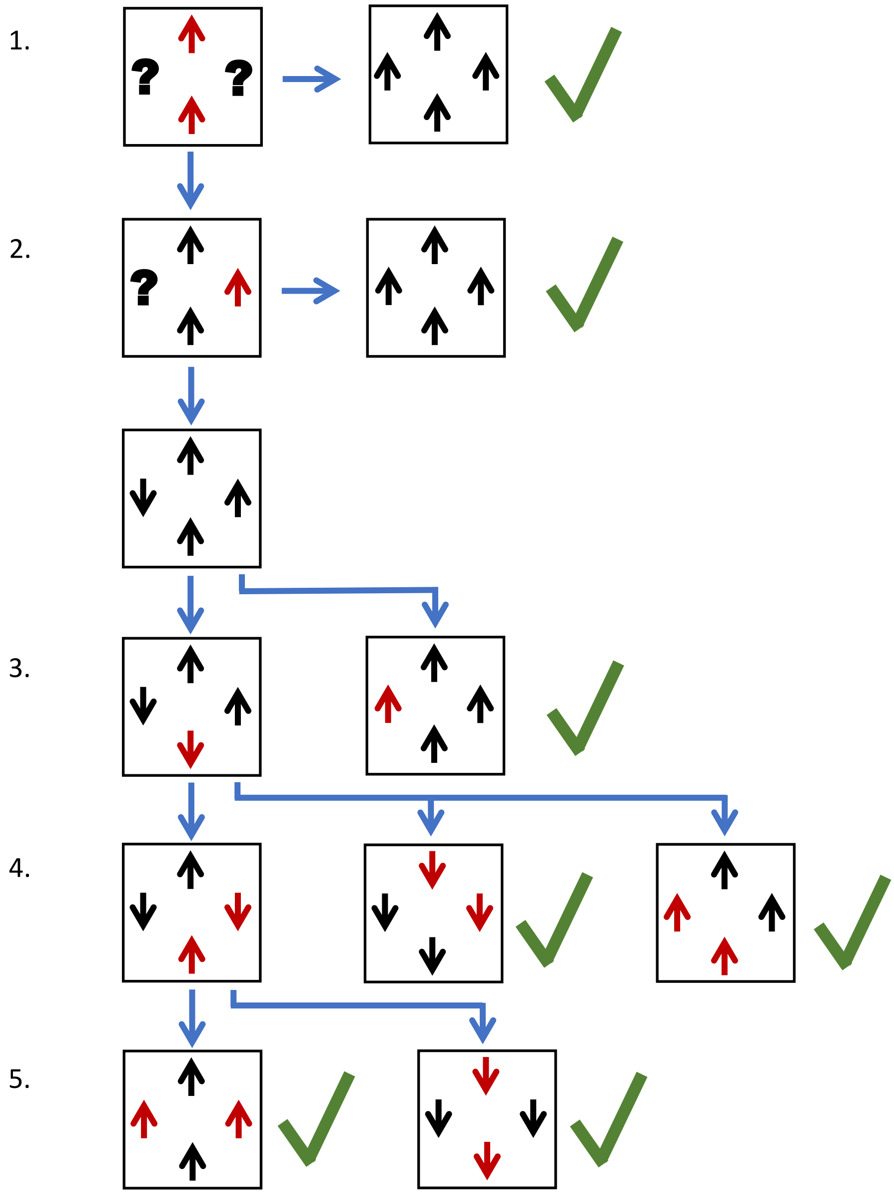
<u>Atrisinājums</u>

Aprakstīsim algoritmu, kas garantē aplausus ne vairāk kā 5 gājienu laikā:

1. Pirmajā gājienā jāieslēdz divi diagonāli pretēji slēdži.
2. Otrajā gājienā izvēlas divus blakus esošus slēdžus, zināms, ka vismaz viens no tiem ir ieslēgts. Ja otrs slēdzis ir izslēgts, jāieslēdz arī tas. Ja aplausi neatskan, tad vēl viens slēdzis ir izslēgts.
3. Trešajā gājienā jāizvēlas diagonāli pretēji slēdži. Ja viens no tiem ir izslēgts, tad, to ieslēdzot, atskanēs aplausi. Ja abi jau ir ieslēgti, tad vienu slēdzi izslēdz. Tagad ir divi izslēgti slēdži viens otram blakus.

4. Ceturtajā gājienā jāizvēlas divi blakus esoši slēdži un jāmaina to stāvoklis uz pretējo. Ja abi slēdži pirms gājiena bija vienādā stāvoklī, tad pēc gājiena skanēs aplausi. Pretējā gadījumā ir divi izslēgti diagonāli pretēji slēdži.
5. Piektajā gājienā izvēlās divus diagonāli pretējus slēdžus un maina to stāvokli uz pretējo un atskanēs aplausi.

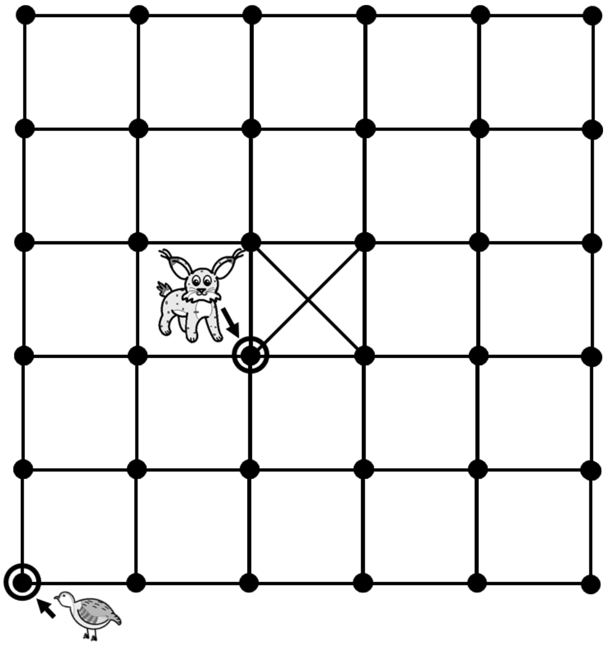
Zemāk attēlota slēdžu novietojuma shēma (skat. 5.att.). Bultiņa uz augšu – ieslēgts slēdzis, bultiņa uz leju – izslēgts slēdzis. Sarkanas bultiņas – attiecīgajā gājienā nospiestie slēdži.



5.att.

5. Irbes plāns

Lūsis un irbe atrodas 5×5 rūtiņu pļavā (6. att. īpaši atzīmētie punkti). Lūsis grib apēst irbi, bet irbe cenšas aizbēgt. Vienā gājienā viņi pārvietojas no viena melnā punkta uz kādu blakus esošo melno punktu, kas ir savienots ar līniju. Gājieni tiek izdarīti pamīšus. Pirmo gājienu izdara lūsis. Ja desmit lūša gājienu laikā irbe netiek noķerta, tad tā aizbēg, bet, ja šo gājienu laikā lūsis viņu noķer, tad irbe tiek apēsta. Gan lūsis, gan irbe visu laiku pilnībā pārredz pļavu. Kurš no viņiem, pareizi izdarot gājienus, vienmēr var sasniegt savu mērķi – lūsis vai irbe?

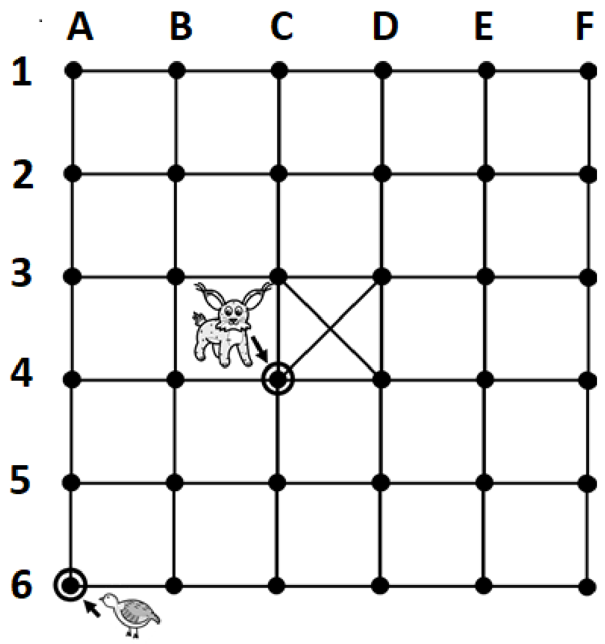


6. att.

__Atrisinājums__

Apzīmēsim katru melno punktu kā parādīts 7. att. Lūsis sākumā atrodas punktā C4, irbe punktā A6. Aprakstīsim lūša stratēģiju, kura viņam nodrošinās uzvaru. Pirmajā gājienā lūsis pārvietojas uz punktu D3. Pieņemsim, ka irbe dodas uz punktu A5 (gadījumu, kad irbe dodas uz punktu B6, apskata simetriski). Lūsis dodas uz punktu C3. Šajā brīdī irbei ir trīs iespējamie gājieni:

- Ja irbe otrajā gājienā dodas uz A4, tad lūsis pārvietojas uz B3. Nākamajā gājienā, ja irbe dosies uz A3 vai B4, lūsis to apēdīs, tāpēc irbe dodas uz punktu A5. Lūsis savukārt pārvietojas uz punktu B4. Vienīgais punkts, uz kuru nākamajā gājienā var doties irbe, ir A6. Lūsis dodas uz punktu B5 un nākamajā gājienā, neatkarīgi no irbes gājiena, noķers irbi. Ne vairāk kā sešu gājienu laikā lūsis noķers irbi.
- Ja irbe otrajā gājienā dodas uz B5, tad lūsis pārvietojas uz C4. Nākamajā gājienā, ja irbe dosies uz B4 vai C5, tad lūsis to apēdīs, tāpēc irbe var doties tikai uz punktu A5 vai B6. Atkarībā no irbes gājiena, lūsis iet attiecīgi uz B4 vai C5. Vienīgais punkts, uz kuru var doties irbe, ir A6. Lūsis dodas uz punktu B5 un nākamajā gājienā, neatkarīgi no irbes gājiena, noķers irbi. Ne vairāk kā piecu gājienu laikā lūsis noķers irbi.
- Ja irbe otrajā gājienā dodas uz A6, tad lūsis pārvietojas uz C4. Irbe var doties uz A5 vai B6. Lūsis dodas uz attiecīgi B4 vai C5. Vienīgais punkts, uz kuru var doties irbe, ir A6. Lūsis dodas uz punktu B5 un nākamajā gājienā, neatkarīgi no irbes gājiena, noķer irbi. Ne vairāk kā piecu gājienu laikā lūsis noķers irbi.



7.att.