"Profesora Cipariņa klubs"
2017./2018. mācību gads

3. nodarbības uzdevumu īsi atrisinājumi

1. Ciemiņi

Pie Jura Ziemassvētku brīvdienās bija atbraukušas viņa māsīcas Zaiga un Mirdza. Zināms, ka Zaiga ir tikpat veca, cik Mirdza būs veca tad, kad Zaiga būs divreiz vecāka, nekā Mirdza bija laikā, kad Zaigas vecums bija vienāds ar pusi no meiteņu šī brīža vecuma. Cik gadu ir Jura māsīcām?

Atrisinājums

Uzdevumā apskatīti trīs laika momenti – apzīmēsim tos kā pagātne, tagadne un nākotne. Ieviesīsim apzīmējumus: ar z apzīmēsim tagadnes Zaigas vecumu, ar m apzīmēsim Mirdzas tagadnes vecumu un ar a apzīmēsim Mirdzas vecumu uzdevumā aprakstītajā pagātnes brīdī.

	Pagātne	Tagadne	Nākotne
Zaiga	$\frac{1}{2}(z+m)$	z	$2a$
Mirdza	a	m	z

Starpība starp meiteņu vecumu nemainās, tātad tā ir vienāda gan tagadnē, gan pagātnē:

$$z-m=\frac{1}{2}(z+m)-a$$

Izsakām no vienādojuma a:

$$a=\frac{3}{2}m-\frac{1}{2}z$$

Reizinām vienādojuma abas puses ar 2:

$$2a=3m-z$$

Starpība starp meiteņu vecumiem nākotnē un tagadnē arī nemainās:

$$2a-z=3m-z-z=z-m$$
$$4m=3z$$
$$\frac{m}{3}=\frac{z}{4}$$

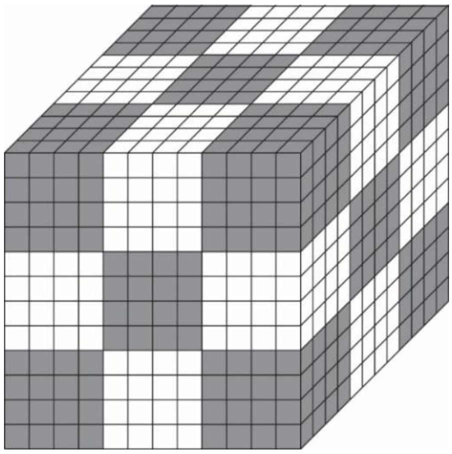
Šo vienādību apmierina skaitļu pāri $z=4\cdot k$ un $m=3\cdot k$, kur k – naturāls skaitlis. Tā kā vecums ir naturāls skaitlis, z jāizvēlas tāds, lai $m=\frac{3}{4}z$ un $\frac{1}{2}(z+m)$ ir naturāli skaitļi. Tātad nederēs kombinācijas, kurās $z+m=(4+3)\cdot k=7k$ ir nepāra skaitlis, tāpēc k jābūt pāra skaitlim, t. i., $k=2n$. Tāpēc $\boldsymbol{z=8\cdot n}$ un $\boldsymbol{m=6\cdot n}$, kur n ir naturāls skaitlis (piemēram, Zaigas un Mirdzas vecums varētu būt 8 un 6 gadi vai 16 un 12 gadi).

2. Piparkūku mīkla

Juris un Andris kopīgi cepa piparkūkas. Juris izaicināja Andri, lai viņš sagriež visu $12\times12\times12$ cm lielo piparkūku mīklu $2\times4\times8$ cm lielos gabaliņos, mīklu nemīcot. Andris apgalvoja, ka tas nav iespējams. Vai Andrim ir taisnība?

Atrisinājums

Sadalīsim doto $12\times12\times12$ cm kubu mazākos kubiņos ar izmēriem $4\times4\times4$ cm. Šos kubiņus pamīšus iekrāsojam kā parādīts 1. att. Redzams, ka lai arī kā mēs izvēlētos izgriezt $2\times4\times8$ cm figūru, tā saturēs vienādu skaitu melno un balto $1\times1\times1$ cm kubiņu. Ievērojam, ka dotajā figūrā ir $14\cdot4\cdot4\cdot4=896$ melni kubiņi un $13\cdot4\cdot4\cdot4=832$ balti kubiņi. Tā kā melno kubiņu ir vairāk kā balto, tad uzdevumā prasīto nav iespējams izpildīt.



1.att.

3. Piparkūku spēle

Pēc piparkūku cepšanas, Andris un Juris nolēma uzspēlēt spēli. Viņi bija uzcepuši piparkūkas ar skaitļiem no 1 līdz 9 – katru tieši vienu reizi. Spēli sāka Juris – viņš paņēma vienu piparkūku. Tad Andris izvēlējās sev citu piparkūku, tad piparkūku ņēma Juris, tad Andris utt. Tā viņi uz maiņām turpināja ņemt piparkūkas, līdz Juris paņēma pēdējo piparkūku. Uzvar tas spēlētājs, starp kura piparkūkām ir trīs piparkūkas, uz kurām uzrakstīto skaitļu summa ir 15. Kurš no puišiem, pareizi spēlējot, var uzvarēt šo spēli?

Atrisinājums

Apskatām maģisko kvadrātu, kuram katras rindas, katras kolonnas un katras diagonāles summa ir 15 (skat. 2. att.). Neviena cita trīs skaitļu kombinācija summā nedod 15.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

2. att.

Ja kāds no spēlētājiem paņems trīs piparkūkas, uz kurām uzrakstītie skaitļi atrodas vienā kolonnā, rindā vai uz vienas diagonāles, tad viņš būs spēlē uzvarējis. Līdz ar to, uzdevumā doto spēli var "pārtulkot' uz analoģisku uzdevumu – spēlētāji atzīmē krustiņus un nullītes 3×3 rūtiņu režģī, līdz tas ir aizpildīts, un uzvar tas spēlētājs, kurš ieguvis trīs savus simbolus vienā līnijā. No klasiskās spēles "krustiņi un nullītes", tas atšķiras ar to, ka laukums jāaizpilda pilnībā, tikai tad nosaka uzvarētāju. Ir zināms, ka spēlē "krustiņi un nullītes" pareizi spēlējot, neviens no spēlētājiem uzvarēt nevar, līdz ar to, arī mūsu uzdevuma dotajā spēlē neviens no puišiem uzvarēt nevar. (Papildu nosacījums spēles gaitu nemaina).

4. Dāvanas

Šajos Ziemassvētkos Andris bija izdomājis lielisku dāvanu Jurim. Viņš bija sagatavojis 11 lielas dāvanu kārbas. Katrā no tām atradās vai nu konfekte "Vētrasputns", vai astoņas vidēja izmēra dāvanu kārbas. Katrā no šīm vidējā izmēra dāvanu kārbām atradās vai nu konfekte "Vētrasputns", vai astoņas maza izmēra dāvanu kārbas. Katrā mazā izmēra dāvanu kārbā atradās pa vienai konfektei "Vētrasputns". Zināms, ka kopā kastēs atradās 102 konfektes "Vētrasputns". Cik daudz dāvanu kārbas Andris uzdāvināja Jurim?

Atrisinājums

Ar x apzīmējam lielo kārbu skaitu, kurās atrodas vidējās kārbas un ar y vidējo kārbu skaitu, kurās atrodas mazās kārbas. Tad kopējo kārbu skaitu varam izteikt ar izteiksmi $11 + 8x + 8y$. Zināms, ka konfektes bija visās kārbās, kurās nebija citas kārbas, tāpēc kopējo kārbu skaitu varam izteikt arī kā $102 + x + y$. Abas izteiksmes pielīdzinot, iegūstam

$$11 + 8x + 8y = 102 + x + y$$
$$7x + 7y = 91$$
$$x + y = 13$$

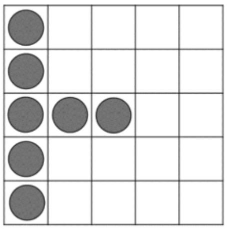
No kā iegūst, ka kopā Andris Jurim uzdāvināja $102 + 13 = \mathbf{115}$ dāvanu kārbas.

5. Šokolāde

Juris nopirka šokolādes tāfelīti ar izmēriem 5×5 gabaliņi. Tad viņš uz dažiem gabaliņiem uzlika pa vienai rozīnei. Andris vēlējās sadalīt šokolādi divās daļās, izdarot vienu lauzienu pa kādu vertikāli vai horizontāli, kas atdala gabaliņus, tā, lai katrā no jauniegūtajiem taisnstūriem atrastos mazāk nekā 5 rozīnes. Kāds ir mazākais skaits rozīņu, kas uz šokolādes jānoliek Jurim, lai nekādi Andris nevarētu sasniegt savu mērķi?

<u>Atrisinājums</u>

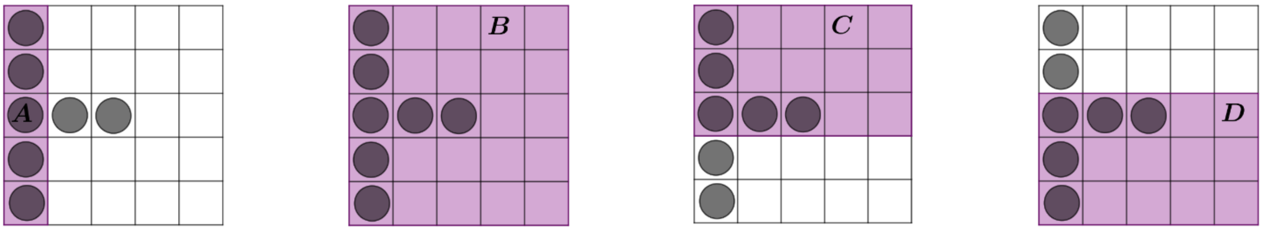
Mazākais skaits rozīņu, kas uz šokolādes tāfelītes jānoliek Jurim, ir septiņas rozīnes, rozīņu izvietojumu skat. 3. att.



3. att.

Sadalīsim kvadrātu pa kādu no vertikālēm divās daļās tā, ka kreisās puses gabals ir mazākais gabals, kurā ir vismaz 5 rozīnes, un šo gabalu apzīmēsim ar A. Līdzīgi ar B apzīmēsim mazāko gabalu, kādu var nolauzt no labās puses, lai tajā būtu vismaz 5 rozīnes. Ar C apzīmēsim mazāko šokolādes gabalu, kādu var iegūt, laužot šokolādi pa kādu no horizontālēm, un kurš satur vismaz piecas rozīnes, skaitot no augšas un līdzīgi ar D – skaitot no apakšās.

Mūsu apskatītajā piemērā gabaliņi A, B, C un D izskatās kā parādīts 4. att.

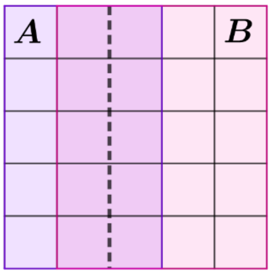


4. att.

Pierādīsim, ka ar sešām rozīnēm nepietiek. Pieņemsim pretējo – ka mums ir izdevies izvietot sešas rozīnes tā, kā prasīts uzdevumā.

Pierādīsim, ka šāda izvietojuma atbilstošajiem taisnstūriem A un B ir tieši viena kopīga kolonna. Apskatīsim citus iespējamos gadījumus:

- Gabaliņiem A un B nav kopīgu kolonnu. Tad minimālais rozīņu skaits ir $5 + 5 = 10$, kas ir pretrunā ar pieņēmumu, ka pietiek ar sešām rozīnēm.
- A un B ir vairāk nekā viena kopīga kolonna. Tad sadalām šokolādes tāfelīti 2 daļās, laužot to pa kādu no kopīgās daļas iekšējām vertikālēm (kā piemēru skat. 5. att. raustīto līniju). Ievērojam, ka kreisās puses taisnstūris ir mazāks par gabaliņu A, tātad tas satur mazāk kā 5 rozīnes, jo A ir mazākā daļa, kurā ir vismaz 5 rozīnes. Taču arī labās puses taisnstūris nesatur vismaz 5 rozīnes, jo šis taisnstūris ir mazāks par taisnstūri B, kurš ir mazākais taisnstūris, kas satur 5 rozīnes. Ja Andris sadalītu šokolādi pa šo apskatīto vertikāli, viņš būtu sasniedzis savu mērķi – abos gabaliņos būtu mazāk kā 5 rozīnes. Tātad Jurim uz šokolādes būtu jānovieto vairāk rozīņu – ar sešām būtu par maz.



5. att.

Varam secināt, ka A un B ir tieši viena kopīga kolonna. Līdzīgi var pierādīt, ka C un D taisnstūriem ir tieši viena kopīga rinda. Tātad visiem šiem taisnstūriem ir tieši viens 1×1 kopīgs šokolādes gabaliņš.
Tā kā katrā taisnstūrī ir ne mazāk kā piecas rozīnes, visi taisnstūri, apskatot tos atsevišķi, satur ne mazāk kā $5 + 5 + 5 + 5 = 20$ rozīnes.
Katra rozīne var piederēt ne vairāk kā trijiem taisnstūriem (A, B, C vai D), izņemot vienu rozīni, kas var piederēt visiem četriem taisnstūriem. Tātad piecas no sešām rozīnēm var piederēt ne vairāk kā trīs gabaliem, un sestā rozīne – ne vairāk kā četriem gabaliem. Līdz ar to, apskatot taisnstūrus atsevišķi, kopējais rozīņu skaits ir ne vairāk kā $3 \times 5 + 4 \times 1 = 19$ rozīnes, taču tas ir pretrunā ar to, ka uz taisnstūriem kopā atrodas vismaz 20 rozīnes. Tātad ar sešām rozīnēm ir par maz, lai sasniegtu mērķi, un septiņi ir mazākais iespējamais rozīņu skaits.