Jauno matemātiķu konkurss
2017./2018. mācību gads

4. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Patiesa vienādība

Parādi vienu piemēru, kādi naturāli skaitļi jāieraksta x, y, z vietā, lai vienādība $x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{30}{7}$ būtu patiesa!

Atrisinājums. Ievietojot $x=4, y=3, z=2$, iegūstam $4+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}=4+1:\frac{7}{2}=4+\frac{2}{7}=\frac{30}{7}$.

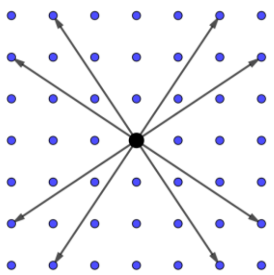
Piezīme. Šis ir vienīgais atrisinājums un to var palīdzēt atrast tālāk aprakstītie spriedumi. Tā kā $\frac{30}{7}=4\frac{2}{7}$, tad

$$x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=4+\frac{2}{7}$$

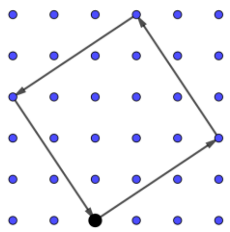
Tā kā x, y, z ir naturāli skaitļi, tad $\frac{1}{y+\frac{1}{z}}$ ir pozitīvs skaitlis, kas ir mazāks nekā 1. Tātad $x=4$ un $\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{2}{7}$ jeb $2y+\frac{2}{z}=7$. Tā kā $2y$ ir naturāls skaitlis, tad arī $\frac{2}{z}$ jābūt naturālam skaitlim. Apskatot abus iespējamos gadījumus $z=1$ vai $z=2$, var atrast pārējos skaitļus.

2. Ģeometriskā blusa

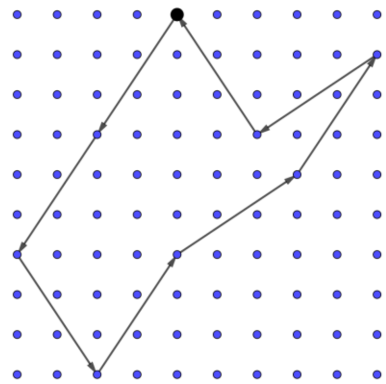
Rūtiņu lapas rūtiņas virsotnē sēž blusa. Blusa prot lēkt no vienas rūtiņu virsotnes uz citu tā, ka pēc lēciena tā ir pārvietojusies 3 virsotnes vienā virzienā (vai nu horizontāli, vai vertikāli) un 2 virsotnes otrā virzienā. Iespējamie blusas lēcieni parādīti 1. att.



1. att.



2. att.



3. att.

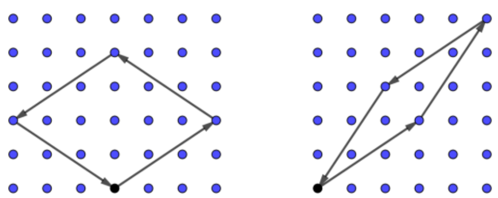
Blusa lēkā no vienas virsotnes uz citu, līdz tā atgriežas sākotnējā rūtiņā, piemēram, 2. att. blusa ar četriem lēcieniem izveidojusi četrstūri, bet 3. att. ar astoņiem lēcieniem – septiņstūri. Uzzīmē vēl divus piemērus, kā blusa ar četriem lēcieniem var izveidot četrstūri tā, lai iegūtie četrstūri nebūtu vienādi ne savā starpā, ne arī ar 2. att. parādīto četrstūri!

a) Uzzīmē trīs dažādus četrstūrus, ko blusa var izveidot ar sešiem lēcieniem!

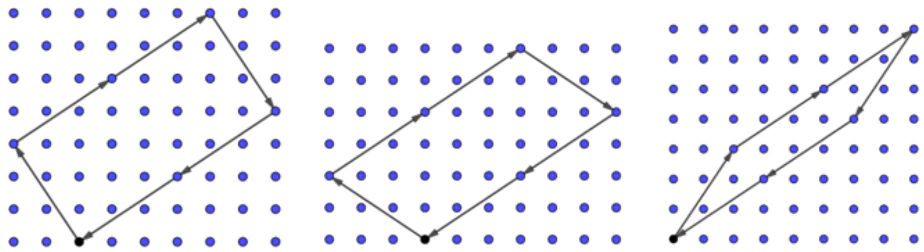
b) Uzzīmē sešus dažādus sešstūrus, ko blusa var izveidot ar sešiem lēcieniem!

Piezīme. Divi daudzstūri ir vienādi, ja tos var uzlikt vienu otram virsū tā, ka tie pilnībā sakrīt.

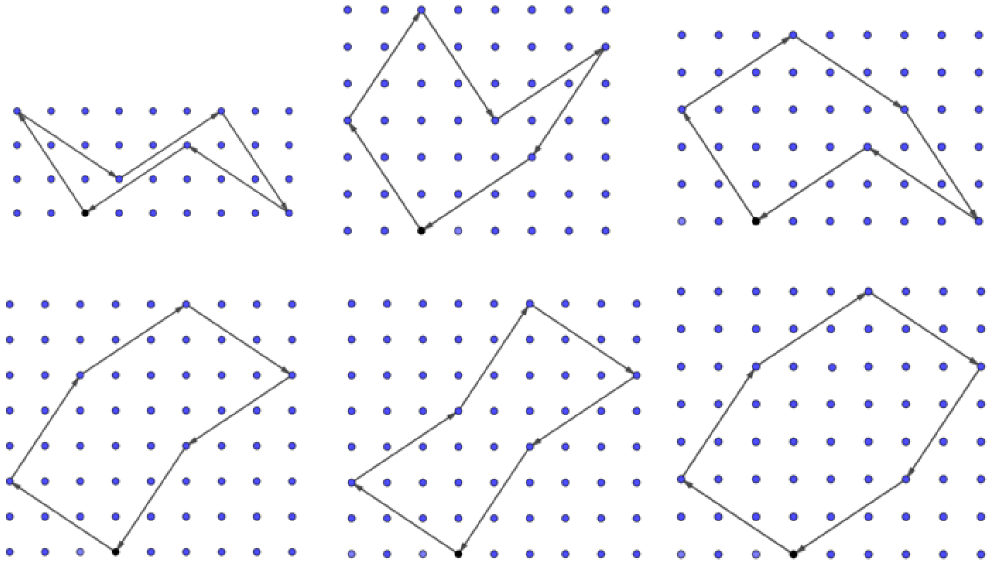
Atrisinājums. a) Skat., piemēram, 4. att. **b)** Skat., piemēram, 5. att. **c)** Skat., piemēram, 6. att.



4. att.



5. att.



6. att.

3. Uzrakstīto skaitļu summas

Skolotāja katram skolēnam iedeva divas lapiņas un aicināja uz katras lapiņas abām pusēm uzrakstīt pa vienam naturālam skaitlim no 1 līdz 9 tā, lai visi uzrakstītie skaitļi būtu dažādi. Pēc tam skolotāja lūdza grozīt lapiņas un katru reizi aprēķināt to divu skaitļu summu, kas atrodas lapiņu augšpusē.

a) Aivars ieguva summas 8, 9, 10 un 11. Kādi skaitļi varēja būt uzrakstīti uz Aivara lapiņām?

b) Tīna uz vienas savas lapiņas uzrakstīja skaitļus 4 un 5. Vienīgās summas, ko varēja iegūt Tīna, bija trīs pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi. Kādi skaitļi varēja būt uzrakstīti uz otras lapiņas?

c) Pārslas iegūtās summas bija četri pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi. Cik no Pārslas uzrakstītajiem skaitļiem varēja būt pāra skaitļi?

Atrisinājums. a) Mazākā summa, ko Aivars ieguva, ir 8, ko var iegūt trīs dažādos veidos $1+7$; $2+6$ un $3+5$. Aivara lielākā iegūtā summa bija 11, ko var iegūt četros dažādos veidos $2+9$; $3+8$; $4+7$ un $5+6$. Tā kā uzrakstītajiem skaitļiem jābūt atšķirīgiem, tabulā ir aplūkoti visi derīgie varianti un pārbaudīts, vai ar šiem skaitļiem var iegūt pārējās divas summas 9 un 10.

Mazākā summa ir 8	Lielākā summa ir 11	Vai var iegūt summas 9 un 10?	Uz vienas lapiņas uzrakstītie skaitļi	Uz otras lapiņas uzrakstītie skaitļi
1 un 7	2 un 9	Jā	1 un 2	7 un 9
	3 un 8	Jā	1 un 3	7 un 8
	5 un 6	Nē		
2 un 6	3 un 8	Jā	2 un 3	6 un 8
	4 un 7	Jā	2 un 4	6 un 7
3 un 5	2 un 9	Nē		
	4 un 7	Jā	3 un 4	5 un 7

b) Trīs summas, ko ieguva Tīna, apzīmējam ar $n, n+1$ un $n+2$. Mazāko summu n iegūst, saskaitot divus mazākos skaitļus. Lielāko summu $n+2$ iegūst, saskaitot divus lielākos skaitļus. Mazāko skaitli, kas uzrakstīts uz otras lapiņas, apzīmējam ar a un lielāko – ar b. Tad iegūstam šādu saskaitīšanas tabulu:

$+$	4	5
a	n	$n+1$
b	$?$	$n+2$

Redzams, ka $5+b$ ir par 1 lielāks nekā $5+a$, no tā varam secināt, ka $b=a+1$. Tā kā gan a, gan b ir mazāki nekā 10 un nav ne 4, ne 5, tad a var būt 1, 2, 6, 7 vai 8 (a nevar būt 3, jo tad b būtu 4; a nevar būt 9, jo tad b būtu 10). Tātad uz otrās lapiņas varēja būt uzrakstīti skaitļi $(1;2), (2;3), (6;7), (7;8)$ vai $(8;9)$.

c) Pamatosim, ka no Pārslas uzrakstītajiem skaitļiem var būt viens pāra skaitlis (piemēram, $(1;2)$ un $(7;9)$, tad atbilstošās summas ir 8; 9; 10; 11) vai trīs pāra skaitļi (piemēram, $(2;3)$ un $(6;8)$, tad atbilstošās summas ir 8; 9; 10; 11).

Četras summas, ko Pārsla ieguva apzīmēsim ar n, $n+1$, $n+2$ un $n+3$. Tā kā iegūtās summas ir četri pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi, tad skaitļiem n un $n+2$ ir vienāda paritāte un arī skaitļiem $n+1$ un $n+3$ ir vienāda paritāte, bet atšķirīga nekā skaitļiem n un $n+2$. Mazāko summu n iegūst, saskaitot divus mazākos skaitļus. Lielāko summu $n+3$ iegūst, saskaitot divus lielākos skaitļus.

Ja uz lapiņām uzrakstītie skaitļi visi būtu pāra skaitļi vai visi būtu nepāra, tad visas iegūtās summas būtu ar vienādu paritāti, bet tā nevar būt.

Pamatosim, ka uz lapiņām nevar būt uzrakstīti tieši divi pāra skaitļi.

- Ja uz vienas lapiņas ir uzrakstīti divi pāra skaitļi un uz otras divi nepāra skaitļi, tad visas summas ir nepāra skaitļi, bet tā nevar būt.
- Ja uz katras lapiņas ir uzrakstīts viens pāra skaitlis un otrs nepāra skaitlis, tad iespējami divi gadījumi:
  - ja abi mazākie skaitļi ir ar vienādu paritāti un arī abi lielākie skaitļi ir ar vienādu paritāti, tad abas summas n un $n+3$ ir pāra skaitļi, bet tā nevar būt;
  - ja abi mazākie skaitļi ir ar dažādu paritāti un arī abi lielākie skaitļi ir ar dažādu paritāti, tad abas summas n un $n+3$ ir nepāra skaitļi, bet tā nevar būt.

4. Konfekšu maisiņi

Kārlim ir 11 maisiņi ar konfektēm. Katrā maisiņā ir no 20 līdz 30 (ieskaitot 20 un 30) konfektēm un nav tādu divu maisiņu, kuros ir vienāds konfekšu skaits. Vai noteikti, izvēloties jebkurus **a)** sešus, **b)** septiņus no šiem maisiņiem, varēs atrast tādus divus, kuros kopā ir 50 konfektes?

Atrisinājums. a) Nē, ne noteikti, piemēram, ja Kārlis izvēlas maisiņus, kuros ir 20, 21, 22, 23, 24, 25 konfektes, tad nav divu maisiņu, kuros kopā būtu 50 konfektes (jo pat $24+25=49<50$).

b) Pamatosim, ka noteikti ir tādi divi maisiņi. Jebkurš no 11 maisiņiem ietilpst vienā no šādām grupām: „20 un 30”; „21 un 29”; „22 un 28”; „23 un 27”; “24 un 26”; “25” (grupas veidotas no maisiņiem, kuros esošo konfekšu summa ir 50, un atsevišķa grupa maisiņam, kurā ir 25 konfektes). Ja no katras grupas būtu paņemts ne vairāk kā viens maisiņš, tad kopā būtu paņemti ne vairāk kā seši maisiņi, bet ir jāizvēlas septiņi maisiņi, tātad noteikti ir tāda grupa, no kuras ir paņemti abi maisiņi, un šajos maisiņos kopā ir 50 konfektes.

5. Darba spars

Lai jaunajā gadā veicinātu darba sparu, pilsētas mērs nolēmis visiem pilsētas uzņēmumiem nosūtīt prēmijas, bet ir aizmirsis gan uzņēmumu adreses, gan to, cik darbinieku strādā katrā uzņēmumā. Ir zināms, ka ēkas numurs, kurā atrodas uzņēmums, atbilst uzņēmuma dibināšanas gadam. Pilsētā ir 5 uzņēmumi: Alfa, Beta, Gamma, Sigma, Tau. Katrs no tiem atrodas uz citas ielas – Alkšņu iela, Bērzu bulvāris, Priežu iela, Ošu iela, Egļu bulvāris. Uzņēmumu dibināšanas gadi ir 1948., 1959., 1960., 1967., 1979. Darbinieku skaits uzņēmumos ir 230, 260, 290, 320, 350. Vēl ir zināmi tālāk dotie fakti.

1. Uzņēmumā ar nosaukumu Tau ir vairāk darbinieku nekā uzņēmumā, kas atrodas Alkšņu ielā.
2. Uzņēmums, kurā ir 350 darbinieki, neatrodas Bērzu bulvārī.
3. Uzņēmumā Alfa ir par 60 darbiniekiem vairāk nekā uzņēmumā, kas dibināts 1979. gadā.
4. 1960. gadā dibinātais uzņēmums atrodas Priežu ielā.
5. Par Alfu un Sigmu ir zināms, ka viens no tiem atrodas Bērzu bulvārī, bet otrs ir dibināts 1959. gadā.
6. Uzņēmums, kurā ir 320 darbinieki, ir vai nu Beta, vai tas kurš dibināts 1960. gadā.
7. Par uzņēmumu Tau un to uzņēmumu, kas dibināts 1967. gadā ir zināms, ka viens atrodas Bērzu bulvārī, bet otrā ir 290 darbinieki.
8. Uzņēmums, kurā ir 260 darbinieki, nav dibināts 1948. gadā.
9. Uzņēmums Tau neatrodas Ošu ielā.

Kāda ir katra uzņēmuma adrese un cik darbinieki strādā katrā uzņēmumā? Uzraksti tikai atbildi bez pamatojuma!

Atrisinājums

Alfa – Ošu iela – 1959. gads – 350 darbinieki;
Beta – Alkšņu iela – 1948. gads – 230 darbinieki;
Gamma – Priežu iela – 1960. gads – 320 darbinieki;
Sigma – Bērzu bulvāris – 1967. gads – 260 darbinieki;
Tau – Egļu bulvāris – 1979. gads – 290 darbinieki.

Piezīme. Uzdevumu vieglāk atrisināt, pakāpeniski aizpildot tālāk doto tabulu, piemēram, atbilstošajās rūtiņās ievelkot " + " un " – ".

	Alfa	Beta	Gamma	Sigma	Tau	1948.	1959.	1960.	1967.	1979.	230	260	290	320	350
Alkšņu iela															
Bērzu bulvāris															
Priežu iela															
Ošu iela															
Egļu bulvāris															
230															
260															
290															
320															
350															
1948.															
1959.															
1960.															
1967.															
1979.															