"Profesora Cipariņa klubs"
2017./2018. mācību gads

4. nodarbības uzdevumu īsi atrisinājumi

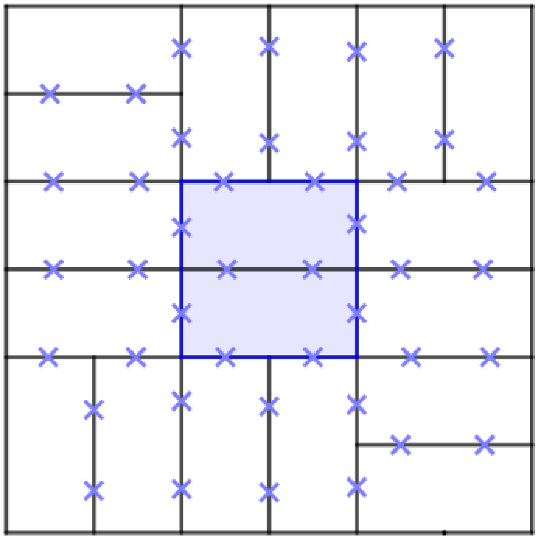
1. Cietoksnis

Bērni šodien bijuši ļoti čakli – viņi sniega kaujai izveidojuši lielu cietoksni, kas sastāv no 36 kvadrāta formas telpām, kuru izmērs ir $2 \times 2\ m$ (skat. 1. att.). Katras divas blakusesošas telpas savieno eja. Lai rītdienas kauja būtu interesantāka, bērni nolēma apvienot blakusesošās telpas pa divām kopā tā, lai beigās visas telpas būtu ar izmēriem $2 \times 4\ m$. Kāds ir mazākais skaitlis $\boldsymbol{n}$ tāds, ka jaunajā cietokšņa izkārtojumā būtu iespējams no jebkuras telpas nonākt jebkurā citā, izejot caur ne vairāk kā $\boldsymbol{n}$ ejām? Atbildi pamatot!

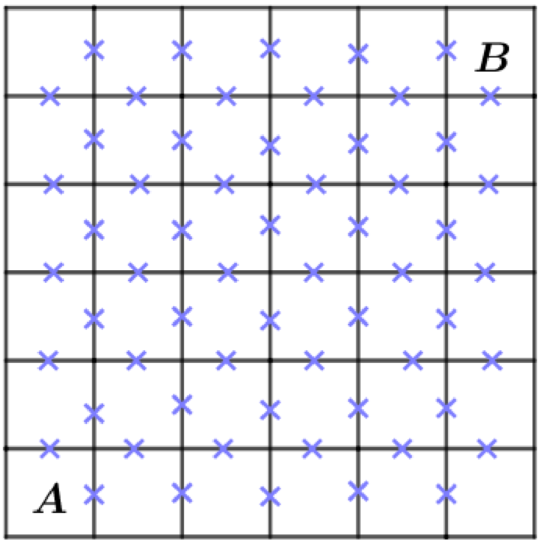
1. att.

Atrisinājums. Mazākais iespējamais $n = 5$ (skat. 2. att., ar ✕ apzīmētas ejas). Redzams, ka lai nonāktu no jebkuras telpas iekrāsotajā daļā, jāiziet cauri ne vairāk kā 2 ejām, bet, lai pārvietotos starp iekrāsotajām telpām, jāiziet cauri ne vairāk kā vienai ejai, tāpēc no jebkuras telpas uz jebkuru citu telpu var aiziet, izejot caur ne vairāk kā $2 + 1 + 2 = 5$ ejām.

Pierādīsim, ka n nevar būt mazāks kā 5. Apskatīsim telpas A un B pirms telpu apvienošanas (skat. 3. att.). Lai nokļūtu no telpas A uz telpu B, jāiziet cauri vismaz 10 ejām un 11 telpām (ieskaitot telpas A un B). Pēc telpu apvienošanas, dažas blakusesošās telpas var būt apvienotas vienā, taču 11 telpas ar izmēru $2 \times 2\ m$, nevar tikt apvienotas 5 vai mazāk telpās ar izmēru $2 \times 4\ m$. Tāpēc jaunajā izkārtojumā būs jāšķērso vismaz 6 telpas (ieskaitot sākuma un beigu telpu) un ne mazāk kā 5 ejas, jo starp katrām divām jaunizveidotajām telpām ir vismaz viena eja.



2. att.



3. att.

2. Skaistā lampa

Svinot Ķīniešu Jauno gadu, Stella un Mare nolēma pagatavot īpašu lampu, kurā bija vieta divām spuldzēm. Vienīgā problēma radās tad, kad meitenes atrada 8 spuldzes – 4 no tām bija jaunas un 4 – izdegušas, bet viņas nezināja, kuras ir jaunās. Lai atrastu derīgās spuldzes, meitenes ņēma pa divām spuldzēm, skrūvēja tās lampā un pārbaudīja, vai tās deg. Ja kaut viena no spuldzēm bija izdegusi, tad lampa neiedegās pat tad, ja viena no spuldzēm bija jauna. Vai iespējams iedegt lampu ar ne vairāk kā

a) 15 mēģinājumiem,
b) 8 mēģinājumiem,
c) 7 mēģinājumiem?

Par mēģinājumu sauc divu spuldžu ieskrūvēšanu lampā un pārbaudīšanu, vai spuldzes iedegas.

Piezīme. Lai iegūtu papildus 3 punktus šajā kārtā, Jūs varat iesūtīt Stellas un Mares izgatavotās lampas dizainu.

Atrisinājums. Parādīsim, ka var iedegt lampu ar ne vairāk kā 7 mēģinājumiem, šis algoritms der kā atbilde gan a), gan b), gan c) gadījumam.

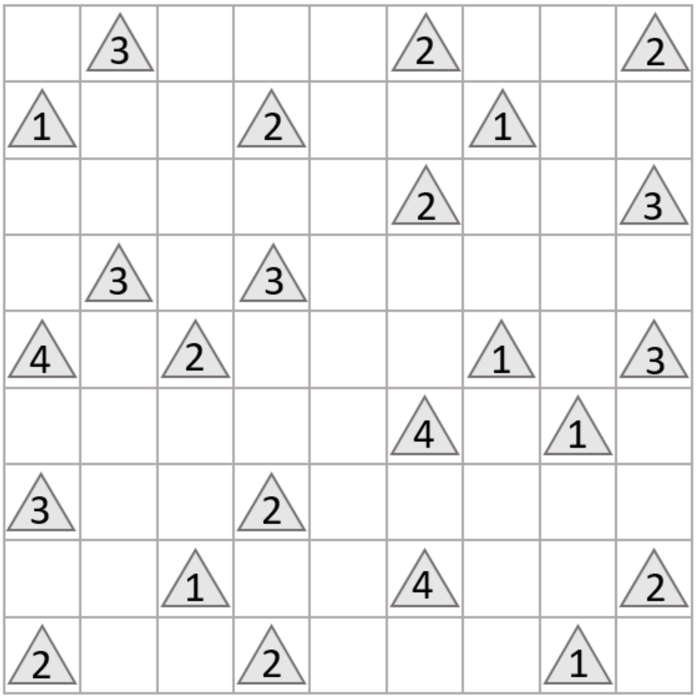
Sadalīsim spuldzes trīs grupās – divas grupas ar 3 spuldzēm un viena grupa ar 2 spuldzēm. Tā kā mums kopā ir 4 jaunas spuldzes, tad pēc Dirihlē principa vienā no šīm grupām būs vismaz divas jaunas spuldzes, līdz ar to, pārbaudot katru pāri katrā grupā, noteikti varēsim atrast šīs divas jaunās spuldzes un iedegt lampu. Lai pārbaudītu katru spuldžu pāri grupā, kurā ir trīs spuldzes, būs vajadzīgi 3 mēģinājumi, bet grupā, kurā ir divas spuldzes – tikai 1 mēģinājums. Tātad kopā būs vajadzīgi ne vairāk kā $3 + 3 + 1 = 7$ mēģinājumi, lai iedegtu lampu.

3. Aizputinātie ceļi

Sūnu ciemā bija milzīgs sniegputenis un tika aizputināti visi ceļi tā, ka vairs nevarēja saprast, kur atrodas ceļš un kur ne. Lai labotu šo situāciju, Ješka nolēma, ka vajag notīrīt sniegu no ceļiem. Bet kā viņam to izdarīt, ja viņš neatceras visus ceļus? Par laimi, kāds Sūnu ciema iedzīvotājs, kurš aizraujas ar matemātisku sakarību meklēšanu, bija ievērojis dažas ceļu īpašības un sastādījis māju atrašanās vietu plānu. Sūnu ciema mājas atzīmētas ar trijstūrīšiem (skat. 4. att.). Ceļu īpašības, kuras viņš pastāstīja Ješkam:

1. no katras mājas iziet tieši tik ceļu, cik ir norādīts uz mājas (trijstūrītī ierakstītais skaitlis);
2. divas mājas savieno ne vairāk kā divi ceļi;
3. ceļš ir nogrieznis, nevis lauzta līnija, un ceļi ir tikai horizontāli un vertikāli;
4. no katras mājas var aiziet uz jebkuru citu māju, izmantojot izveidotos ceļus;
5. katrs ceļš savieno tieši divas mājas;
6. ceļi savstarpēji nekrustojas.

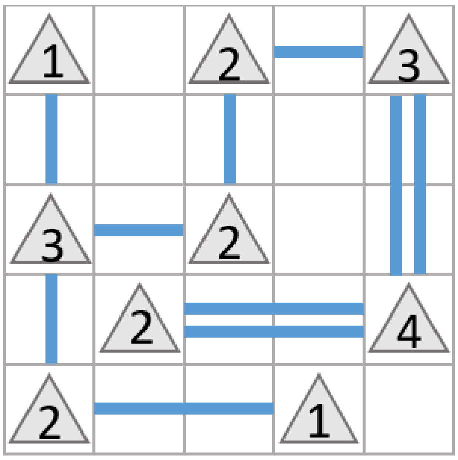
Parādi, kur atrodas ceļi, kurus Ješkam ir jānotīra no sniega!



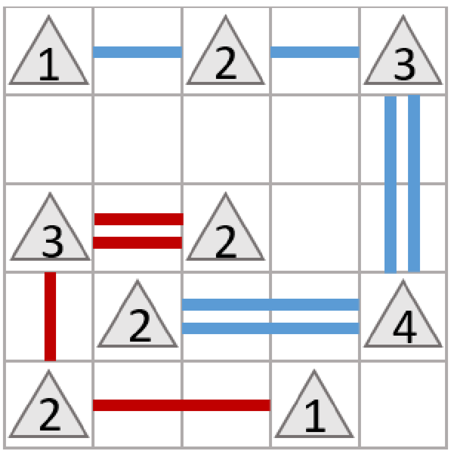
4. att.

5. att. parādīts **piemērs** notīrītajiem ceļiem, ja Sūnu ciemā būtu tikai 9 mājiņas.

6. att. parādīts gadījums, kad <u>netiek</u> izpildīti uzdevuma nosacījumi, jo, piemēram, nav iespējams aiziet pa izveidotajiem ceļiem no kreisās apakšējās mājas uz labo augšējo māju.

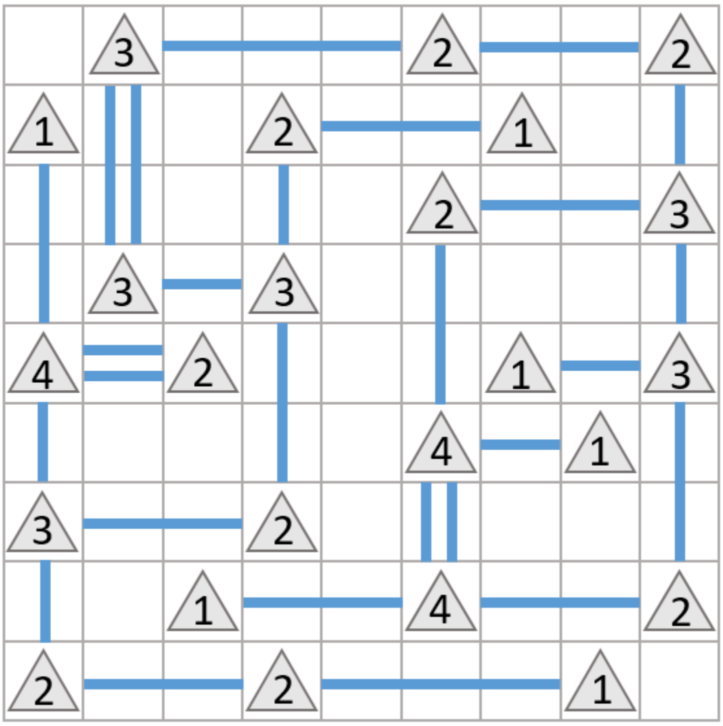


5. att.



6. att.

Atrisinājums. Skat. 7. att.



7. att.

4. Lieliskie slēpotāji

Kādā kalnu ciematā dzīvo 2018 iedzīvotāji. Ir zināms, ka 1992 no viņiem ir lieliski slēpotāji un labi pārzina slēpošanas maršrutus, bet 26 iedzīvotāji nekad mūžā nav stāvējuši uz slēpēm un neko nezina par slēpošanas maršrutiem. Kristaps ir ieradies šajā ciematā, lai aprunātos par labākajiem slēpošanas maršrutiem un izmēģinātu kādu no tiem. Diemžēl viņš nepazīst nevienu no iedzīvotājiem un nezina, kuri no viņiem ir lieliski slēpotāji. Lai atrastu kādu šādu iedzīvotāju, Kristaps palūdz katram no viņiem uz lapiņas uzrakstīt 26 viņaprāt lieliskus slēpotājus. Zināms, ka iedzīvotāji, kas prot slēpot, uz lapiņām uzrakstīja 26 lielisku slēpotāju vārdus, bet iedzīvotāji, kas neprot slēpot, uzrakstīja 26 cilvēku vārdus, kuri, iespējams, nav lieliski slēpotāji, bet ir lieliski cilvēki. Katrs iedzīvotājs uz lapiņas varēja rakstīt arī savu vārdu. Kā Kristapam, izmantojot tikai informāciju no lapiņām, atrast vienu lielisku slēpotāju?

Atrisinājums. Tā kā *neslēpotāja* vārdu varēja uzrakstīt tikai cits *neslēpotājs*, tad *neslēpotāju* vārdi uz lapiņām var parādīties ne vairāk ka 26 reizes. Tāpēc, ja kāds vārds uz lapiņām parādījies vairāk kā 26 reizes, tas noteikti būs lielisks slēpotājs.

Apskatīsim gadījumu, ka neviens no vārdiem nav uzrakstīts vairāk kā 26 reizes. Šajā gadījumā katrs vārds uz lapiņām būs pieminēts tieši 26 reizes. Līdz ar to visi *neslēpotāji* būs rakstījuši visus *neslēpotājus* – izveidosies grupa ar 26 vienādiem sarakstiem. Iespējams, ka arī lieliskie slēpotāji būs izveidojuši vairākas grupas ar 26 vienādiem sarakstiem, taču tā kā 2018 nedalās ar 26, noteikti būs saraksti, kas ir ārpus šādām grupām. Izvēloties jebkuru no šiem sarakstiem, Kristaps iegūs sarakstu ar 26 lieliskiem slēpotājiem.

5. Starpbrīdis

Pēc tam, kad puiši bija apsprieduši ziemas olimpisko spēļu notikumus, Juris un Andris ķērās pie galvenā starpbrīža notikuma – matemātikas uzdevuma:

> Pierādiet, ja trīsciparu skaitlis $\overline{abc}$ ir pirmskaitlis, tad $b^2 - 4ac$ nav vesela skaitļa kvadrāts!

Izpildi arī Tu šo uzdevumu!

Piezīme. Par pirmskaitli sauc naturālu skaitli, kuram ir tieši dažādi divi dalītāji – pats skaitlis un skaitlis 1.

1. atrisinājums. Aplūkosim, kādiem trīsciparu skaitļiem izteiksme $b^2 - 4ac$ ir vesela skaitļa x kvadrāts.

Ievērosim, ka $4ac$ ir pāra skaitlis, tāpēc b^2 un $x^2 = b^2 - 4ac$ paritāte sakrīt (abi ir vai nu pāra, vai nu nepāra skaitļi). Līdz ar to b un x paritāte sakrīt. Tā kā ne a, ne c nevar būt 0 ($\overline{abc}$ vai nu nebūs trīsciparu, vai arī nebūs pirmskaitlis), tad $x < b$. Lai izteiksme $b^2 - 4ac$ būtu nenegatīva, tad $b > 1$.

Cipars c nevar būt $0, 2, 4, 6, 8$, jo tad $\overline{abc}$ būs pāra skaitlis un nebūs pirmskaitlis, kā arī c nevar būt 5, jo tad $\overline{abc}$ dalīsies ar 5.

Tabulā aplūkosim, kādas b un x kombinācijas ir iespējamas, un piekārtosim tiem derīgas a un c vērtības, un pārbaudīsim, vai ieguvām pirmskaitli.

$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{a \cdot c}$	**Iespējamās $\boldsymbol{a}$ un $\boldsymbol{c}$ vērtības**
2	0	1	Der $a = c = 1$, taču $121 = 11 \cdot 11$ nav pirmskaitlis.
3	1	2	Der $a = 2, c = 1$, taču $231 = 21 \cdot 11$ nav pirmskaitlis.
4	0	4	Der $a = 4, c = 1$, taču $441 = 21 \cdot 21$ nav pirmskaitlis.
4	2	3	Der $a = 1, c = 3$, taču $143 = 13 \cdot 11$ nav pirmskaitlis; Der $a = 3, c = 1$, taču $341 = 31 \cdot 11$ nav pirmskaitlis.
5	1	6	Der $a = 2, c = 3$, taču $253 = 23 \cdot 11$ nav pirmskaitlis; Der $a = 6, c = 1$, taču $651 = 7 \cdot 93$ nav pirmskaitlis.
5	3	4	Der $a = 4, c = 1$, taču $451 = 41 \cdot 11$ nav pirmskaitlis.
6	0	9	Der $a = 1, c = 9$, taču $169 = 13 \cdot 13$ nav pirmskaitlis; Der $a = 3, c = 3$, taču $363 = 33 \cdot 11$ nav pirmskaitlis; Der $a = 9, c = 1$, taču $961 = 31 \cdot 31$ nav pirmskaitlis.
6	2	8	Der $a = 8, c = 1$, taču $861 = 7 \cdot 123$ nav pirmskaitlis.
6	4	5	Der $a = 5, c = 1$, taču $561 = 51 \cdot 11$ nav pirmskaitlis.
7	1	12	Der $a = 4, c = 3$, taču $473 = 43 \cdot 11$ nav pirmskaitlis.
7	3	10	Nav nevienas derīgas a un c kombinācijas.
7	5	6	Der $a = 2, c = 3$, taču $273 = 7 \cdot 39$ nav pirmskaitlis.
8	0	16	Nav nevienas derīgas a un c kombinācijas.
8	2	15	Der $a = 5, c = 3$, taču $583 = 53 \cdot 11$ nav pirmskaitlis.
8	4	12	Der $a = 4, c = 3$, taču $483 = 7 \cdot 69$ nav pirmskaitlis.
8	6	7	Der $a = 1, c = 7$, taču $187 = 17 \cdot 11$ nav pirmskaitlis;

			Der $a = 7, c = 1$, taču $781 = 71 \cdot 11$ nav pirmskaitlis.
9	1	20	Nav nevienas derīgas a un c kombinācijas.
9	3	18	Der $a = 2, c = 9$, taču $299 = 13 \cdot 23$ nav pirmskaitlis; Der $a = 6, c = 3$, taču $693 = 63 \cdot 11$ nav pirmskaitlis.
9	5	14	Der $a = 2, c = 7$, taču $297 = 27 \cdot 11$ nav pirmskaitlis.
9	7	8	Der $a = 8, c = 1$, taču $891 = 81 \cdot 11$ nav pirmskaitlis.

Kā redzams, visos gadījumos atrastie skaitļi nebija pirmskaitļi, un tātad trīsciparu pirmskaitlis ar doto īpašību neeksistē.

2. atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka $b^2 - 4ac$ ir vesela skaitļa kvadrāts un apzīmesim $x^2 = b^2 - 4ac$. Trīsciparu skaitli $\overline{abc}$ varam pārrakstīt kā

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c$$

Abas vienādojuma puses sareizinot ar $4a$, iegūstam

$$4a \cdot \overline{abc} = 400a^2 + 40ab + 4ac$$

Tā kā $x^2 = b^2 - 4ac$, tad $4ac = b^2 - x^2$.

$$4a \cdot \overline{abc} = (400a^2 + 40ab + b^2) - x^2$$

$$4a \cdot \overline{abc} = (20a + b)^2 - x^2$$

$$4a \cdot \overline{abc} = (20a + b - x)(20a + b + x)$$

Abām izteiksmēm kreisajā pusē ir vienāda paritāte, un šo izteiksmju reizinājums dalās ar 4, tāpēc abas izteiksmes dalās ar 2. Izdalot abas vienādojuma puses ar 4, iegūst

$$a \cdot \overline{abc} = \left(10a + \frac{b - x}{2}\right)\left(10a + \frac{b + x}{2}\right)$$

Labās puses izteiksme ir naturālu skaitļu reizinājums, kurš dalās ar $\overline{abc}$. Tā kā $\overline{abc}$ ir pirmskaitlis, viens no reizinātājiem – $10a + \frac{b-x}{2}$ vai $10a + \frac{b+x}{2}$ – dalās ar $\overline{abc}$. Tāpēc vismaz viens no reizinātajiem būs lielāks kā $\overline{abc}$. Taču lielākais no šiem abiem reizinātajiem

$$10a + \frac{b + x}{2} \leq 10a + b \leq 99 < \overline{abc}$$

Iegūta pretruna. Līdz ar to $b^2 - 4ac$ nevar būt vesela skaitļa kvadrāts, ja $\overline{abc}$ ir pirmskaitlis.

Piezīme. Ja risinot rodas uzdevuma formulējumu neskaidrības, savus jautājumus droši sūtiet uz e-pastu nms@lu.lv ☺