Jauno matemātiķu konkurss
2017./2018. mācību gads

5. kārtas uzdevumi

1. Patiesa vienādība

Parādi divus piemērus, kādi naturāli skaitļi jāieraksta burtu a, b, c, d vietā, lai iegūtu patiesu vienādību

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}$$

Atrisinājums

Der, piemēram, šādi skaitļi:

1) $a=6,\ b=3,\ c=8,\ d=2$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{6}{3}-\frac{8}{2}=2-4=-2$$

$$\frac{a-c}{b-d}=\frac{6-8}{3-2}=\frac{-2}{1}=-2$$

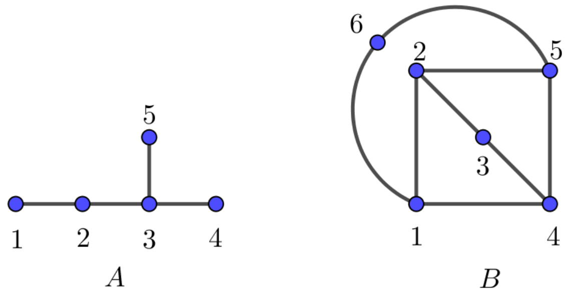
2) $a=3,\ b=2,\ c=4,\ d=4$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{3}{2}-\frac{4}{4}=\frac{3}{2}-\frac{2}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{a-c}{b-d}=\frac{3-4}{2-4}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

2. Pēckārtijas novadu ceļu sistēma

Valstī *Pēckārtijā* ir daži novadi. Katrā novadā pilsētu nosaukumi ir pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi. Ja novadā divas pilsētas ir savienotas ar ceļu, tad to nosaukumi ir savstarpēji pirmskaitļi (tas ir, to vienīgais kopīgais dalītājs ir skaitlis 1), skat., piemēram, 1. att., kur doti divi novadi A un B; novadā A ir četri ceļi un novadā B ir 8 ceļi.



1. att.

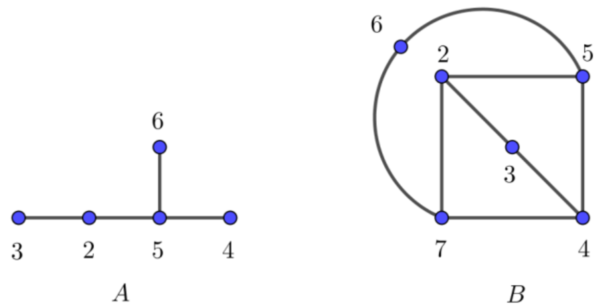
a) Parādi, kā novadā A nomainīt pilsētu nosaukumus ar naturāliem skaitļiem no 2 līdz 6 un novadā B – ar skaitļiem no 2 līdz 7, lai saglabātos tā pati ceļu sistēma!

b) Pamato, ka novadā B nav iespējams nomainīt pilsētu nosaukumus ar naturāliem skaitļiem no 5 līdz 10, lai saglabātos tā pati ceļu sistēma!

c) Pamato, ka novadā A pilsētu nosaukumus var aizstāt ar jebkuriem pieciem pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem, lai saglabātos tā pati ceļu sistēma!

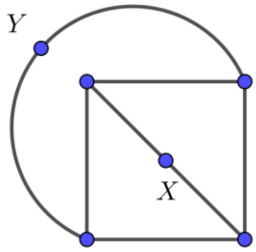
d) Zināms, ka novadā C ir sešas pilsētas, kuru nosaukumi ir naturāli skaitļi no 1 līdz 6. Kāds lielākais skaits ceļu var būt šajā novadā?

Atrisinājums. a) Der, piemēram, šāds izvietojums, skat. 2. att.



2. att.

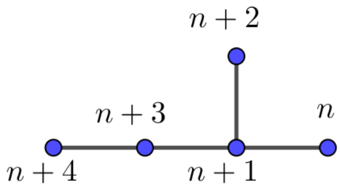
b) Lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, pilsēta 6 var tikt savienota tikai ar pilsētu 5 vai 7, bet pilsēta 10 – tikai ar pilsētu 7 vai 9. Līdz ar to šīs pilsētas var atrasties tikai punktos X un Y (skat. 3. att.). Gan pilsētai 6, gan pilsētai 10 jābūt savienotai ar pilsētu 7, taču novadā B nav tādas pilsētas, kas būtu tieši savienota gan ar X, gan Y, tāpēc prasītais nav iespējams.



3. att.

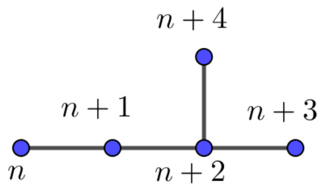
c) Piecus pēc kārtas sekojošos naturālos skaitļus apzīmēsim ar n; $n+1$; $n+2$; $n+3$; $n+4$ un $n+5$. Ievērojam, ka divi blakusesoši naturāli skaitļi ir savstarpēji pirmskaitļi un arī divi secīgi nepāra skaitļi ir savstarpēji pirmskaitļi. Apskatām divus gadījumus.

1. Ja n ir pāra skaitlis, tad pilsētu nosaukumus var aizstāt tā, kā parādīts 4. att.



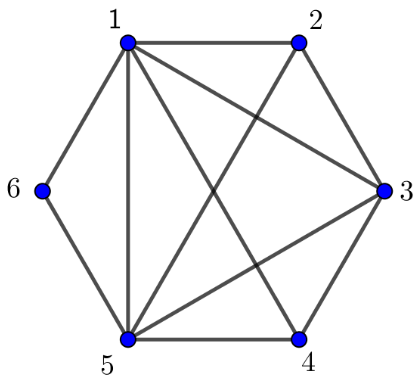
4. att.

2. Ja n ir nepāra skaitlis, tad pilsētu nosaukumus var aizstāt tā, kā parādīts 5. att.



5. att.

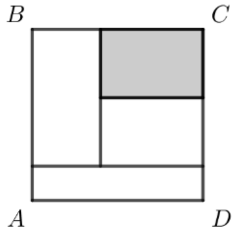
d) Pamatosim, ka lielākais skaits ceļu ir 11. Ja starp sešām pilsētām tiktu izveidoti visi iespējamie ceļi, pavisam būtu $(6 \cdot 5) : 2 = 15$ ceļi. Pēc uzdevuma nosacījumiem, nevar būt ceļi, kas savieno pilsētas 2 un 4, 2 un 6, 4 un 6, 3 un 6. Tātad lielākais iespējamais ceļu skaits ir $15 - 4 = 11$, atbilstošo ceļu izvietojumu skat. 6. att.



6. att.

3. Taisnstūra laukums

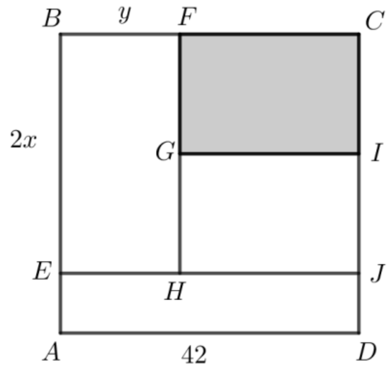
Kvadrāta $ABCD$ malas garums ir 42 cm. Tas sadalīts četros taisnstūros (skat. 7. att.), visu šo taisnstūru perimetri ir vienādi. Aprēķini iekrāsotā taisnstūra laukumu!



7. att.

Atrisinājums

Apzīmējam nogriežņa BE garumu ar $2x$ un BF garumu ar y (skat. 8. att.).

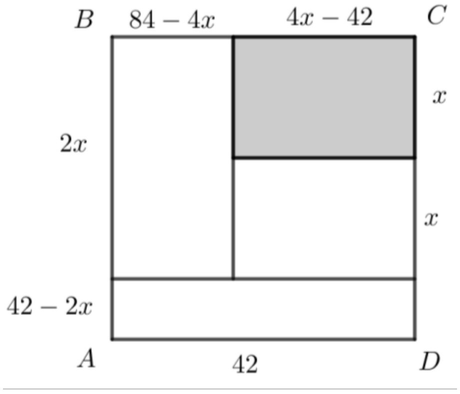


8. att.

Tā kā dots, ka kvadrāta malas garums ir 42 cm, tad nogriežņa AE garums ir $(42 - 2x)$ centimetri un taisnstūra $AEJD$ perimetrs $P_{AEJD} = 2 \cdot 42 + 2 \cdot (42 - 2x) = 168 - 4x$ centimetri. Tā kā taisnstūru $AEJD$ un $EBFH$ perimetri ir vienādi, tad

$$168 - 4x = 2 \cdot 2x + 2y$$
$$2y = 168 - 8x$$
$$y = 84 - 4x$$

Tad $FC = 42 - (84 - 4x) = 4x - 42$ centimetri. Tā kā taisnstūriem $GFCI$ un $HGIJ$ ir vienādi perimetri un garumi, tad tiem būs arī vienādi platumi, tas ir, $CI = IJ = 2x : 2 = x$ (skat. 9. att.).



9. att.

Taisnstūru $GFCI$ un $AEJD$ perimetri ir vienādi, tāpēc

$$168 - 4x = 2 \cdot (4x - 42) + 2x$$
$$168 - 4x = 8x - 84 + 2x$$
$$-14x = -252$$
$$x = 18$$

Iegūstam, ka iekrāsotā taisnstūra malu garumi ir 18 cm un $4 \cdot 18 - 42 = 30$ cm, tā laukums $18 \cdot 30 = 540$ cm^2.

4. Mazākā summa

Trīs naturālu skaitļu reizinājums $a \cdot b \cdot c = 1230$. Kāda ir mazākā iespējamā šo skaitļu summa $a + b + c$?

Atrisinājums

Mazākā summa ir $5 + 6 + 41 = 52$. Pamatosim, ka mazāku summu iegūt nevar. Ievērojam, ka $1230 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 41$. Tā kā viens no pirmreizinātājiem ir 41, tad tieši viens no a, b, c dalās ar 41. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka a dalās ar 41. Ja a būtu lielāks nekā 41, tad $a + b + c \geq 82 + b + c$, kas jau ir vairāk nekā 52. Tātad $a = 41$ un vēl ir jāatrod tādi skaitļi b un c, kuru reizinājums ir 30 un summa ir vismazākā. Apskatām, kā var iegūt reizinājumu 30.

$\boldsymbol{b \cdot c}$	$1 \cdot 30$	$2 \cdot 15$	$3 \cdot 10$	$5 \cdot 6$
$\boldsymbol{b + c}$	31	17	13	11

Mazākā summa ir 11 un to iegūst, ja atlikušie divi skaitļi b un c ir 5 un 6.

5. Kurš noteikti var uzvarēt?

Dota tabula ar izmēriem **a)** 1×5 rūtiņas; **b)** 1×20 rūtiņas. Sākumā visas rūtiņas ir tukšas. Divi spēlētāji pamīšus veic gājienus. Vienā gājienā spēlētājs izvēlas tukšu rūtiņu un ieraksta tajā vienu no trim simboliem: ●, ○ vai ✕. Spēle beidzas, kad visas rūtiņas ir aizpildītas. Pirmais spēlētājs uzvar, ja beigās var atrast trīs secīgas rūtiņas, kas satur visus trīs simbolus, pretējā gadījumā uzvar otrais spēlētājs. Kurš spēlētājs noteikti var uzvarēt – pirmais (tas, kurš spēli sāk) vai otrais?

Atrisinājums

a) Parādīsim, ka pirmais spēlētājs vienmēr var uzvarēt. Apzīmējam katru rūtiņu (skat. 10. att.).

A	B	C	D	E

10. att.

Pirmajā gājienā pirmajam spēlētajam jāieraksta ✕ rūtiņā A. Šķirojam gadījumus atkarībā no otra spēlētāja gājiena:

- Ja otrais spēlētājs rūtiņā B ieraksta simbolu ● vai ○, tad pirmais spēlētājs rūtiņā C ieraksta simbolu, kas vēl nav izmantots. Tad rūtiņās A, B un C ir ierakstīti visi trīs simboli, un pirmais spēlētājs ir nodrošinājis sev uzvaru.
- Ja otrais spēlētājs rūtiņā B ieraksta ✕, tad pirmais spēlētājs rūtiņā E ieraksta simbolu ○ (skat. 11. att.). Neatkarīgi no tā, kādu gājienu izdarīs otrais spēlētājs, pirmais spēlētājs varēs ierakstīt tādu simbolu atlikušajā rūtiņā tā, ka būs iegūti visi trīs simboli rūtiņās B, C un D vai C, D un E.

✕	✕	C	D	○

11. att.

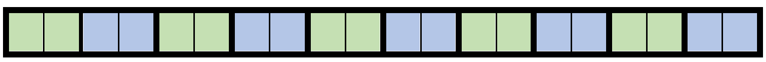
- Ja otrais spēlētājs rūtiņā C ieraksta simbolu ● vai ○, tad pirmais spēlētājs rūtiņā B ieraksta simbolu, kas vēl nav izmantots. Tad rūtiņās A, B un C ir ierakstīti visi trīs simboli, un pirmais spēlētājs ir nodrošinājis sev uzvaru.
- Ja otrais spēlētājs rūtiņā C ieraksta ✕, tad pirmais spēlētājs rūtiņā D ieraksta simbolu ○ (skat. 12. att.). Neatkarīgi no tā, kādu gājienu izdarīs otrais spēlētājs, pirmais spēlētājs varēs ierakstīt tādu simbolu atlikušajā rūtiņā tā, ka būs iegūti visi trīs simboli rūtiņās B, C un D vai C, D un E.

✕	B	✕	○	E

12. att.

- Ja otrais spēlētājs rūtiņā D vai E ieraksta jebkuru simbolu, tad pirmais spēlētājs rūtiņā C ieraksta simbolu, kas atšķiras no otrā spēlētāja ierakstītā simbola. Neatkarīgi no otrā spēlētāja gājiena, pirmais vienmēr var nodrošināt savu uzvaru.

b) Parādīsim, ka otrais spēlētājs vienmēr var uzvarēt. Otrais spēlētājs domās sadala rūtiņas pa pāriem (skat. 13. att.). Pēc katra no pirmā spēlētāja gājiena, otrais spēlētājs ieraksta tādu pašu simbolu kā pirmais spēlētājs tajā pašā pārī, kurā simbolu ierakstījis pirmais spēlētājs. Šādi spēlējot, otrais spēlētājs nodrošina, ka nevar atrast trīs secīgas rūtiņas, kas satur visus trīs simbolus.



13. att.