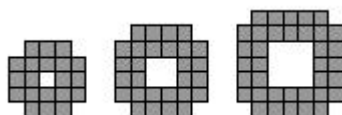


PUNKTIŅŠ (A grupa) Skaitļu virknes
20.04.2018

Nodarbības mērķis: gatavoties 44. Atklātajai Matemātikas Olimpiādei, kur šogad pasludinātā tēma ir “Skaitļu virknes”. Uzdevumi izvēlēti, lai skolēni mācītos atklāt ģeometrisku objektu likumsakarības un attīstītu telpisko iztēli.

1. No cik kvadrātiņiem būs konstruēta desmitā figūra?



Atrisinājums. Uzdevuma nolūks ir atrast figūru veidošanas algoritmu. Aprēķināt kvadrātiņu skaitu var dažādi.

1. veids: var pieņemt, ka ir dots kvadrāts a malas garumu n kvadrātiņi, no kura izgriezti centrs un stūru kvadrātiņi. Tad formula ir $n^2 - (n - 4)^2 - 4$.

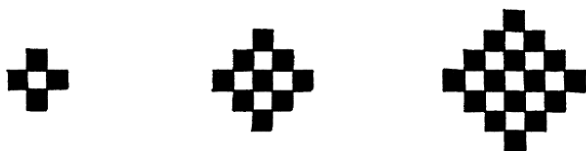
2. veids: var sasummēt ārējos “nogriežņus”, tas ir, taisnstūrus ar izmēru $(n - 2) \times 1$, un tad pieskaitīt iekšējā kvadrāta kvadrātiņus mīnus vidējā cauruma kvadrātiņi. Formula būs: $4(n - 2) + (n - 2)^2 - (n - 4)^2$.

3. veids: ievērosim, ka figūras stūros ir 3 kvadrātiņu konfigurācija. Ja tos izgriež, paliek 4 bloki, kuros ir $(n - 4) \times 2$ kvadrātiņi. Tad kopīgā formula ir $3 \cdot 4 + (n - 4) \cdot 2 \cdot 4$

Otra uzdevuma daļa ir atrast kvadrātiņu skaitu desmitajā figūrā. Te jāievēro, ka pirmās figūras aptverošā kvadrāta malas garums ir 5. Tāpēc desmitajai figūrai $n = 14$. Aprēķinam, ka tajā ir 92 kvadrātiņi, piemēram, pēc trešā veida: $12 + 10 \cdot 8 = 92$.

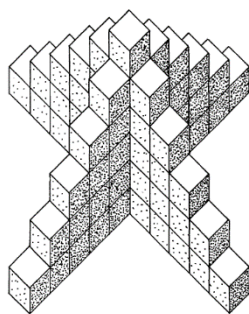
Piezīme: ceturtās klases skolēniem, protams, nevar prasīt, lai viņi raksta pirmā un otrā veida aprēķina formulas ar nezināmiem un pakāpēm. Te ir tikai īsi pierakstīts kvadrātiņu skaita aprēķināšanas algoritms, lai skolotājs var saprast, par ko ir runa. Skolēniem šie algoritmi jāpaskaidro, balstoties uz vizuāliem piemēriem.

2. Šajā attēlā doti ornamentī, kur horizontālā diagonālē ir 3, 5 un 7 kvadrātiņi atbilstoši. Ievēro, ka pirmajā attēlā kopumā ir 5 kvadrātiņi – 4 melni un 1 balts. Cik kopumā kvadrātiņu būs ornamentā, kura horizontālajā diagonālē ir 11 kvadrātiņi?



Atrisinājums. Te jāievēro, ka melno kvadrātiņu skaits ir 4; 9; 16; ..., ko var izteikt kā $2 \cdot 2$; $3 \cdot 3$; $4 \cdot 4$; ... Tātad melno kvadrātiņu skaita virkne ir 4; 9; 16; 25; 36; ... Līdzīgi balto kvadrātiņu virkne ir 1; 4; 9; 16; 25; Tad aplūkojamajā figūrā, kur uz horizontālās diagonāles ir 11 kvadrātiņi, no tiem ir 6 melni un 5 balti. Līdz ar to melno kvadrātiņu skaits ir $6 \cdot 6 = 36$, bet balto kvadrātiņu skaits ir $5 \cdot 5 = 25$.

3. Aplūko figūru. Cik kubiņi būtu vajadzīgi, lai šāda veida figūru uzkonstruētu augstumā 1 vai 2, vai 3? Cik kubiņi vajadzīgi, lai uzkonstruētu figūru augstumā 10?



Atrisinājums. Izpētīsim vienu no figūras četriem “spārniem”. Tajā ietilpst

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ kubiņi. Ievērosim, ka vien “spārna” kubiņu skaits ir naturālu skaitļu virknes summa. Kopumā ir četri spārni un centrālais tornis, kura augstums dotajā attēlā ir 6. Dotajai figūrai kubiņu skaits ir $15 \cdot 4 + 6 = 66$. Līdzīgi spriežot, figūrai augstumā 1 ir 1 kubiņš; figūrai augstumā 2 ir 6 kubiņi, figūrai augstumā 3 ir 15 kubiņi. Figūras augstumā 10 kubiņu skaits ir $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) \cdot 4 + 10 = 190$ kubiņi.

4. Dota skaitļu virkne

$$\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{1}{2}; \frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3}; \frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \dots$$

Kāds kārtas numurs šajā virknē ir skaitlim $\frac{4}{17}$?

Atrisinājums. Vispirms jāaplūko dotā skaitļu virkne, lai saprastu, pēc kāda likuma tā ir konstruēta. Dažkārt skaitļu virknes, kas dotas saucējā un skaitītājā, ieteicams aplūkot atsevišķi. Saucējā redzami skaitļi veido virkni $1; 1; 2; 1; 2; 3; 1; 2; 3; \dots$. Saliksim šos skaitļus iekavās:

$(1); (1; 2); (1; 2; 3; \dots); \dots = (1); (1; 2); (1; 2; 3; 4); (1; 2; 3; 4; 5); \dots$ Savukārt skaitītājā šie skaitļi ir atbilstoši sakārtoti otrādā secībā. Tāpēc skaitlis $\frac{4}{17}$ daļas atrodas tajā apakšvirknē, kur ir vismaz 17 skaitļi.

Ievērojot, ka skaitītājā ir skaitlis 4, secinām, ka skaitlis 17 ir ceturtais no beigām. Šo apakšvirkni veido skaitļi $\frac{20}{1}; \frac{19}{2}; \frac{18}{3}; \frac{17}{4}; \frac{16}{5}; \dots; \frac{4}{17}; \frac{3}{18}; \frac{2}{19}; \frac{1}{20}$. Te meklējamais skaitlis atrodas 17 pozīcijā. Atliek saskaitīt iepriekšējo apakšvirkņu elementu kopējo skaitu

$$1 + 2 + 3 + \dots + 18 + 19 = 190$$

Tāpēc meklētais skaitlis dotajā virknē atrodas 207 vietā.

5. Aritmētiskajā progresijā ir skaitļi 7, 11, 15, 19, 23, Agate saskaitīja šīs virknes visus pirmos 16 skaitļus. Kāda ir šī summa?

Piezīme. Jaunāko klašu skolēni var nezināt šos terminus; kas ir aritmētiskā progresija. Ieteicams viņiem vispirms pajautāt, kādas skaitļu īpašības viņi te saskata, kādas ir sekojošo skaitļu atšķirības. Pēc tam var formulēt progresijas likumu. Tad mācāmiešiem veidot aprēķina formulas.

Atrisinājums. Kad ceturtās klases skolēni ir atraduši virknes veidošanās likumu, tad jāmēģina dotos skaitļus "sašķelt" sastāvdaļās:

$$7; 11; 15; 19; 23; \dots = 7; 7+4; 7+4+4; 7+4+4+4; \dots$$

Tad skaitļu formula ir $7; 7+4; 7+4\cdot 2; 7+4\cdot 3; 7+4\cdot 5; \dots$

Lai atrastu virknes sešpadsmito skaitli, virknes pirmajam skaitlim 15 reizes jāpieskaita 4. Sešpadsmitais skaitlis ir 67. Visu sešpadsmit skaitļu summa ir

$$7\cdot 16 + 4 + 4\cdot 2 + 4\cdot 3 + \dots + 4\cdot 15 = 7\cdot 16 + 4\cdot (1 + 2 + \dots + 15) = \\ = 112 + 4\cdot 120 = 592.$$

6. Ir doti naturālu skaitļu virknes pirmie divi locekļi. Katru nākamo aprēķina kā iepriekšējo divu virknes locekļu summu. Virknes septītais loceklis ir 28. Kāda varētu būt virknes pirmā locekļa vislielākā iespējamā vērtība?

Atrisinājums. Vismazākais naturālais skaitlis ir 1. Ja pieņem, ka pirmie divi skaitļi ir 1 un 1, tad veidojas sekojoša skaitļu virkne, kuru pazīst kā Fibonači skaitļu virkni:

$$1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; \dots$$

Te septītais skaitlis ir 13, tas ir, mazāks par doto. No tā secinām, ka pirmie virknes locekļi ir lielāki par 1, varbūt viens no tiem. Te skaitļu nav daudz, tāpēc ir visai vienkārši veikt pilnu variantu pārslasi – aplūkot pirmos divus virknes skaitļus, kuri varētu būt (1; 2), (2; 1); (2; 2),

(1;3), (3; 1), un tamlīdzīgi. Pirmajos gadījumos septītais virknes loceklis ir par mazu, bet aplūkojot gadījumu (3; 2), kur septītais skaitlis ir 31, iznākums ir par lielu. Tad var aplūkot virknītes, kur viens no pirmajiem diviem skaitļiem ir 4 un atrast:

$$4; 1; 5; 6; 11; 17; 28$$

Citos gadījumos iznākums ir lielāks.

Var spriest arī citādi:

Skaitlis 28 ir divu naturālu skaitļu summa, kur viens no skaitļiem nevar būt mazāks par 5. Kopumā ir iespējami 10 skaitļu pāri, kuru summa ir 28 un no kuriem neviens nav mazāks par 5:

$$14 + 14; 15 + 13; 16 + 12; 17 + 11; 18 + 10; 19 + 9; 20 + 8; 21 + 7; 22 + 6; 23 + 5$$

Šie divi skaitļi ir dotās skaitļu virknes piektais un sestais locekļi, tie nevar būt vienādi saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem. Tāpat arī jāņem vērā, ka virknes locekļi, sākot ar trešo, noteikti veido augošu skaitļu secību. Aplūkosim skaitļus 15 + 13. Tad ceturtais skaitlis ir 2, kas nevar būt (jo mazākais iespējamais ceturtais skaitlis ir atrodams Fibonači virknē un tas ir 3). Aplūkosim 16 + 12. Te ceturtais skaitlis ir 4, seko, ka trešais skaitlis ir 8, tātad lielāks par ceturto virknes locekli – pretruna. Pāris 17 + 11 der (skat. iepriekš). Tālākie skaitļu pāri atkal ir nederīgi, jo neveidojas augoša skaitļu secība.

Atbilde: lielākais iespējamais virknes pirmais skaitlis ir 4.