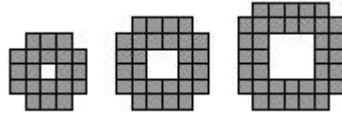


**PUNKTIŅŠ (B grupa) Skaitļu virknes**

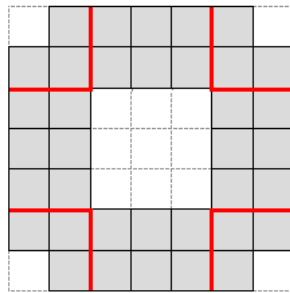
20.04.2018

*Īsi risinājumi un komentāri*

1. No cik kvadrātiņiem būs konstruēta simtā figūra?



*Atrisinājums.* Te iespējami dažādi risinājuma veidi. Viens no vienkāršākiem veidiem ir aplūkot stūra konfigurācijas no 3 kvadrātiņiem un blokus no  $(n - 4) \times 2$  kvadrātiņiem, ja figūras platums ir  $n$ :

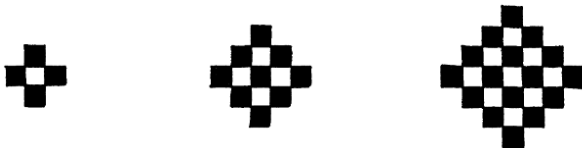


Attēlā redzamās figūras kvadrātiņu skaits ir  $3 \times 4 + 6 \times 4 = 36$ .

Pirmās figūriņas platums ir 5 kvadrātiņi, otrās figūras platums ir 6, bet trešās 7 kvadrātiņi. Tātad figūru platums virknē palielinās par 1. no tā var aprēķināt, ka 100-tās figūras platums ir 104 kvadrātiņi. Tajā viena bloka platums ir 100, tad kvadrātiņu skaits šajā figūrā ir

$$3 \times 4 + 100 \times 2 \times 4 = 812.$$

2. Šajā attēlā doti ornamenti, kur horizontālā diagonālē ir 3, 5 un 7 kvadrātiņi atbilstoši. Ievēro, ka pirmajā attēlā kopumā ir 5 kvadrātiņi – 4 melni un 1 balts. Cik kopumā kvadrātiņu būs ornamentā, kura horizontālajā diagonālē ir 111 kvadrātiņi?



*Ieteikums.* Vienas figūras attēlu vajag “pagriezt”, tas ir, ievērot, ka figūra ir kvadrāts. Tā, piemēram, trešajā figūrā ir  $4 \times 4$  melnie kvadrātiņi un  $3 \times 3$  baltie.

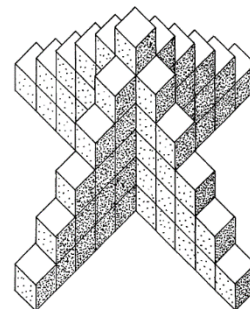
*Atrisinājums.*  $n$ -tās figūras diagonāle satur  $n$  baltus un  $n + 1$  melnus kvadrātiņus. 11-tā figūra satur 55 baltus un 56 melnus kvadrātiņus. Šajā figūrā ir  $56 \times 56 + 55 \times 55 = 6161$  kvadrātiņi.

3. Aplūko figūru. Cik kubiņi būtu vajadzīgi, lai šāda veida figūru uzkonstruētu augstumā 1 vai 2, vai 3? Cik kubiņi vajadzīgi, lai uzkonstruētu figūru augstumā 20?

*Atrisinājums.* Figūras kubiņu skaits vienā spārnā ir secīgu naturālu skaitļu summa  $1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$ . 20-tās figūras spārna augstums ir 19. Figūrai ir 4 spārni un vidējais tornis, tāpēc kubiņu skaits ir

$$20 + 4 \cdot \frac{19(19+1)}{2} = 20 + 2 \cdot 19 \cdot 20 = 20 \cdot (1 + 38) = 780$$

Figūra augstumā 1 satur tikai 1 kubiņu, augstumā 2 satur 6 kubiņus, augstumā 3 satur 15 kubiņus.



4. Dota skaitļu virkne 2; 5; 14; 41; 122; 365; ....  
Atrodi virknes astotā locekļa aprēķināšanas likumu!

*Atrisinājums.* Virknes locekļi samērā strauji palielinās. Te jāatrod likumsakarība, kā no viena virknes elementa var iegūt nākamo:

$$5 = 2 \cdot 2 + 1; \quad 14 = 5 \cdot 2 + 4; \quad 41 = 14 \cdot 2 + 13; \dots$$

Šis virknes locekļus var aprēķināt rekursīvi, tas ir, pakāpeniski:

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2} - 1 = 3 \cdot a_{n-1} - 1$$

Virknes septītais loceklis ir  $3 \cdot 365 - 1 = 1094$ , bet astotais virknes loceklis ir

$$3 \cdot 1094 - 1 = 3281$$

5. Dota skaitļu virkne

$$\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{1}{2}; \frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3}; \frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \dots$$

Kāds kārtas numurs šajā virknē ir skaitlim  $\frac{4}{17}$ ?

*Atrisinājums.* Vispirms jāaplūko dotā skaitļu virkne, lai saprastu, pēc kāda likuma tā ir konstruēta. Dažkārt skaitļu virknes, kas dotas saucējā un skaitītājā, ieteicams aplūkot atsevišķi. Saucējā redzami skaitļi veido virkni 1; 1; 2; 1; 2; 3; 1; 2; 3; .... Saliksim šos skaitļus iekavās:

(1); (1; 2); (1; 2; 3; ...); ... = (1); (1; 2); (1; 2; 3; 4); (1; 2; 3; 4; 5); .... Savukārt skaitītājā šie skaitļi ir atbilstoši sakārtoti otrādā secībā. Tāpēc skaitlis  $\frac{4}{17}$  daļas atrodas tajā apakšvirknē, kur ir vismaz 17 skaitļi. Ievērojot, ka skaitītājā ir skaitlis 4, secinām, ka skaitlis 17 ir ceturtais no beigām. Šo apakšvirkni veido skaitļi  $\frac{20}{1}; \frac{19}{2}; \frac{18}{3}; \frac{17}{4}; \frac{16}{5}; \dots; \frac{4}{17}; \frac{3}{18}; \frac{2}{19}; \frac{1}{20}$ . Te meklējamais skaitlis atrodas 17 pozīcijā. Atliek saskaitīt iepriekšējo apakšvirkņu elementu kopējo skaitu

$$1 + 2 + 3 + \dots + 18 + 19 = 190$$

Tāpēc meklētais skaitlis dotajā virknē atrodas 207 vietā.

6. Aritmētiskajā progresijā ir skaitļi 7, 11, 15, 19, 23, .... Agate saskaitīja šīs virknes visus pirmos 100 skaitļus. Kāda ir šī summa?

*Atrisinājums.* Virknes skaitļi veidojas pēc likuma 7; 7 + 4; 7 + 8; 7 + 12;...

$$a_n = 7 + 4 \cdot (n - 1)$$

Visu 100 skaitļu summa:

$$\begin{aligned} 7 + (7 + 4) + (7 + 4 \cdot 2) + (7 + 4 \cdot 3) + \dots + (7 + 4 \cdot 99) &= 7 \cdot 100 + 4 \cdot (1 + 2 + \dots + 99) \\ &= 700 + 4 \cdot \frac{(1 + 99) \cdot 99}{2} = 700 + 2 \cdot 100 \cdot 99 = 20500 \end{aligned}$$

7. Ir doti naturālu skaitļu virknes pirmie divi locekļi. Katru nākamo aprēķina kā iepriekšējo divu virknes locekļu summu. Virknes septītais loceklis ir 2018. Kāda varētu būt virknes pirmā locekļa vislielākā iespējamā vērtība?

*Atrisinājums.* Apskatīsim skaitļu virknes veidošanas principu. Trešo virknes locekli aprēķina

$$a_3 = a_1 + a_2$$

Ceturto virknes locekli aprēķina kā iepriekšējo divu skaitļu summu

$$a_4 = a_2 + a_3 = a_2 + a_1 + a_2 = a_1 + 2a_2$$

Līdzīgi

$$a_5 = a_3 + a_4 = 2a_1 + 3a_2$$

tāpat

$$a_6 = 3a_1 + 5a_2$$

$$a_7 = 5a_1 + 8a_2$$

Tad

$$5a_1 = 2018 - 8a_2$$

Virknes pirmā skaitļa vērtība būs vislielākā, ja otrais skaitlis būs pēc iespējas vismazākais, tas ir skaitlis 1. Aprēķinām, ka skaitlis  $a_1 = 402$ .

8. Skaitļu virknes pirmie divi locekļi ir 2018 un 2017. Katru nākamo aprēķina kā divu iepriekšējo locekļu starpības moduli. Kāds kārtas numurs šajā virknē būs skaitlim 2000?

*Atrisinājums.* Uzrakstīsim dažus pirmos virknes locekļus:

2018; 2017; 1; 2016; 2015; 1; 2014; 2013; 1; 2012; .....

Šajā virknē katrs trešais skaitlis ir skaitlis 1, un katrā skaitļu trijniekā ir divi pēc kārtas sekojoši skaitļi:  $2n$  un  $2n - 1$ . No skaitļa 2018 līdz skaitlim 2001 veidojas 9 skaitļu pāri, virknē tie ietilpst kopumā deviņos trijniekos:  $(2n; 2n - 1; 1)$ . Šie trijnieki ietver 27 skaitļus, tāpēc skaitlim 2000 ir 28. kārtas numurs.