"Profesora Cipariņa klubs"

1. nodarbība

Bieži vien nākas risināt uzdevumus, kur jāpamato, ka kāda īpašība piemīt visiem uzdevumā dotajiem lielumiem vai arī pastāv kāds lielums ar minētu īpašību. Dažreiz to ir viegli izdarīt, apskatot visus iespējamos variantus.

Piemērs. Pierādi, ka taisnstūra, kura malu garumi ir naturāli skaitļi un perimetrs ir 14 cm, laukums ir pāra skaitlis!

Atrisinājums. Apzīmējam taisnstūra malu garumus ar a un b. Pēc dotā $P = 2(a + b) = 14$ cm, no kā izriet, ka $a + b = 7$ cm. Tā kā a un b ir naturāli skaitļi, tad varam apskatīt visus gadījumus, kā, saskaitot divus skaitļus, summā iegūt 7.

- Ja $a = 1$ cm un $b = 6$ cm, tad laukums $a \cdot b = 6$ cm^2 ir pāra skaitlis.
- Ja $a = 2$ cm un $b = 5$ cm, tad laukums $a \cdot b = 10$ cm^2 ir pāra skaitlis.
- Ja $a = 3$ cm un $b = 4$ cm, tad laukums $a \cdot b = 12$ cm^2 ir pāra skaitlis.

Pieminēsim, ka nav nozīmes tam, kuras malas garums ir apzīmēts ar a un kuras ar b, tāpēc katrs apskatītais gadījums patiesībā ietver divus, jo varam mainīt vietām apzīmējumus.
Tā kā katrā gadījumā laukuma vērtība ir pāra skaitlis, tad prasītais ir pierādīts.

Dažreiz nav iespējams aplūkot visus iespējamos gadījumus, tad šādos brīžos var nākt palīgā paņēmiens "**pierādījums no pretējā**". Ar šo metodi cenšas uzdot tādus jautājumus, lai, atbildot uz tiem, nonāktu pie pretrunas vai acīmredzami aplama apgalvojuma. Tas ir ērti, jo pietiek apskatīt gadījumu, kas notiktu, ja kaut vienam lielumam neizpildītos šī īpašība, nevis pārbaudīt, vai visiem izpildās. Ja rodas pretruna, iegūstam, ka šāda situācija nav iespējama.

Piemērs. Pierādi, ka nav tāda taisnstūra, kura malu garumi ir naturāli skaitļi un kura perimetrs ir pirmskaitlis!

Atrisinājums. Lai pamatotu, ka šāds taisnstūris nepastāv, mums būtu jāpārbauda visi iespējamie taisnstūri, bet tādu ir bezgalīgi daudz, līdz ar to visus pārbaudīt nevaram. Lai atvieglotu mūsu meklējumus, mēs pieņemam pretējo – pastāv tāds taisnstūris, kura perimetrs ir pirmskaitlis. Apzīmējot tā malu garumus ar a un b, iegūstam, ka $P = a + b + a + b = 2 \cdot (a + b)$. Pēc mūsu pieņēmuma P ir pirmskaitlis, bet no labās puses izteiksmes mēs redzam, ka tas dalās ar 2. Tātad vienīgais loģiskais izskaidrojums būtu, ja $a + b = 1$, jo vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2. Šeit arī rodas pretruna – mēs zinām, ka taisnstūra malas garums ir naturāls, tāpēc $a + b \geq 1 + 1 = 2$ un ir iegūta pretruna pieņēmumam, ka šāds taisnstūris pastāv. Prasītais ir pierādīts.

Šādi mums bija jāapskata tikai viens teorētisks taisnstūris nevis visi iespējamie. Grūtākais šajā paņēmienā ir atrast jautājumu, kuru uzdot, lai rastos pretruna. Lai mazliet jums to atvieglotu, šeit būs daži principi:

1. Ja jāpamato, ka kāda īpašība izpildās visiem lielumiem, apskati, kas notiktu, ja būtu tāds, kam tā neizpildās.
2. Ja tomēr, meklējot pretrunu, tas neizdodas, nebēdājies, jo varbūt esi atradis veidu, kā konstruēt pretpiemēru. Tagad tikai atliek no teorētiska apsvēruma pāriet konkrētā pretpiemērā.
3. Ja jāpamato, ka pastāv tādi lielumi, kuriem kaut kas izpildās vai neizpildās, apskati, kas notiktu, ja attiecīgi nevienam neizpildītos vai visiem izpildītos.

Uzdevumi

1. Dots kvadrāts ar izmēriem 3×3 rūtiņas. Katrā tā rūtiņā ierakstīts viens naturāls skaitlis. Kvadrātu sauc par maģisku, ja katrā rindā, katrā kolonnā un abās galvenajās diagonālēs ierakstīto skaitļu summas ir vienādas.

a) Vai eksistē tāds maģisks kvadrāts, kura rūtiņās pa reizei ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 9?

b) Vai eksistē tāds maģisks kvadrāts, kura rūtiņās pa reizei ierakstīti naturālie skaitļi 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10?

2. Dots, ka n ir naturāls skaitlis. Pierādīt vai atspēkot dotos apgalvojumus!

a) Ja n^2 ir nepāra skaitlis, tad n ir nepāra.

b) Ja $n^3 + 5$ ir nepāra skaitlis, tad n ir pāra.

c) Skaitlis $n^2 - n + 41$ vienmēr ir pirmskaitlis.

d) Skaitlis $4^n - 1$ vienmēr dalās ar 3.

3. Plaknē no punkta O dažādos virzienos novilkti 19 stari. Vai starp tiem noteikti eksistē divi tādi stari, starp kuriem leņķis ir mazāks nekā $19°$?

4. Uz šaha galdiņa novietotas 44 dāmas. Pierādīt, ka katra no tām apdraud vismaz vienu citu!

5. Kādu dienu Francis aiz garlaicības sāka rakstīt kādu interesantu virkni:

$$\frac{0}{1};\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{1}{1}.$$

Tā ir augoša virkne, kuras pirmais loceklis ir 0 un pēdējais loceklis ir 1, bet pārējie virknes locekļi ir nesaīsināmas daļas, kuru saucēji nepārsniedz kādu skaitli, ko sauc par virknes kārtu. Iepriekšējā piemērā Francis bija uzrakstījis 4. kārtas virkni. Pēc kāda laika viņam sanāca uzrakstīt arī 5. kārtas virkni:

$$\frac{0}{1};\frac{1}{5};\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{2}{5};\frac{1}{2};\frac{3}{5};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{1}{1}.$$

Viņš saskatīja kādu interesantu īpašību – jebkuru divu blakus esošu virknes locekļu saucēju summa pārsniedz virknes kārtu!

a) Pārliecinies arī tu, uzrakstot 7. kārtas virkni!

b) Francis, ilgi domādams, formulēja savu novērojumu apgalvojumā:

> Ja ir dota n-tās kārtas virkne, tad jebkuriem diviem blakus esošiem virknes locekļiem $\frac{a}{b}$ un $\frac{c}{d}$ ir spēkā nevienādība $b + d > n$.

Palīdzi viņam pierādīt šo apgalvojumu!