

Grūtāki uzdevumi par Dirihlē principu

Uzdevums 1

10x10 rūtiņu lapā jāizvieto sekojoši „kuģi”: viens 1x4 (t.i. četrstūris 1x4 rūtiņas), divi 1x3, trīs 1x2 un četri 1x1. Kuģiem nedrīkst būt kopīgu punktu, bet tie var pieskarties laukuma malām. Pierādīt, ka:

- Ja kuģus izvieto šajā secībā (sāk ar lielākajiem), tad vienmēr izdosies izvietot visus kuģus
- Ja kuģus izvieto apgrieztā secībā (sāk ar mazākajiem), iespējama situācija, ka visus kuģus izvietot nav iespējams.

Uzdevums 2

No naturāliem skaitļiem no 1 līdz 1200 izvēlējās 372 dažādus skaitļus tā, ka nekādu divu starpība nav 4, 5 vai 9. Pierādīt, ka tika izvēlēts skaitlis 600.

Uzdevums 3

Futbola turnīrā katra no $n > 4$ komandām spēlēja ar katru. Par uzvaru tika piešķirti 3 punkti, par neizšķirtu - 1, par zaudējumu - 0.

Turnīra beigās izrādījās, ka visām komandām ir vienāds punktu skaits. Pierādīt, ka var atrast 4 komandas, kurām ir vienāds uzvaru, neizšķirtu un zaudējumu skaits

Uzdevums 4

Plaknē uzzīmēta riņķa līnija, kuras iekšienē Miervaldis prātā atzīmē n punktus, bet Visvaldis mēģina šos punktus atrast.

Vienā darbībā Visvaldis norāda uz punktu (iekš, vai ārpus riņķa līnijas), bet Miervaldis paziņo attālumu no šī punkta līdz tuvākajam iedomātajam (bet vēl neatrastajam) punktam. Ja šis attālums ir nulle, tad punkts skaitās atrasts. Visvaldis prot atzīmēt punktus plaknē, un veikt konstrukcijas ar cirkuli un lineālu bez skalas.

Vai Visvaldis var atminēt visus punktus ar mazāk kā $(n+1)^2$ darbībām?

Uzdevums 5

Katra no deviņām taisnēm sadala kvadrātu divos četrstūros, kuru laukumu attiecība ir 2:3. Pierādīt, ka vismaz trīs no šīm taisnēm iet caur vienu punktu.

Uzdevums 6

Skaitļi 1,2,3...101 uzrakstīti virknē kaut kādā secībā. Pierādīt, ka no tiem var izdzēst 90 tā, ka palikušie 11 būs sakārtoti vai nu augošā, vai dilstošā secībā!

Uzdevums 7

Bezgalīgas rūtiņu lapas līniju rūtiņu virsotnes izkrāsotas trīs krāsās. Pierādīt, ka eksistē vienādsānu taisnleņķa trīsstūris kura visas virsotnes atrodas vienādas krāsas punktos.