"Profesora Cipariņa klubs"

1. nodarbības uzdevumi un atrisinājumi

1. Dots kvadrāts ar izmēriem 3×3 rūtiņas. Katrā tā rūtiņā ierakstīts viens naturāls skaitlis. Kvadrātu sauc par maģisku, ja katrā rindā, katrā kolonnā un abās galvenajās diagonālēs ierakstīto skaitļu summas ir vienādas.

a) Vai eksistē tāds maģisks kvadrāts, kura rūtiņās pa reizei ierakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 9?

b) Vai eksistē tāds maģisks kvadrāts, kura rūtiņās pa reizei ierakstīti naturālie skaitļi 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10?

Atrisinājums

a) Jā, eksistē, piemēram, skat. 1. att.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

1. att.

b) Nē, neeksistē. Ja šāds kvadrāts eksistētu, tad tā rindu summām būtu jābūt vienādām. Visu trīs rindu summa ir vienāda ar visu rūtiņās ierakstīto skaitļu summu, tas ir,

$$1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 53.$$

Tā kā 53 nedalās ar 3, tad ir iegūta pretruna un šāds maģiskais kvadrāts neeksistē.

2. Dots, ka n ir naturāls skaitlis. Pierādīt vai atspēkot dotos apgalvojumus!

a) Ja n^2 ir nepāra skaitlis, tad n ir nepāra.

b) Ja $n^3 + 5$ ir nepāra skaitlis, tad n ir pāra.

c) Skaitlis $n^2 - n + 41$ vienmēr ir pirmskaitlis.

d) Skaitlis $4^n - 1$ vienmēr dalās ar 3.

Atrisinājums

a) Mums ir dots, ka n^2 ir nepāra skaitlis. Jāpamato, ka n arī ir nepāra skaitlis. Pieņemsim pretējo, ka n ir pāra skaitlis. Tas nozīmē, ka n var uzrakstīt formā $n = 2k$, kur k ir naturāls skaitlis. Tad $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$, tas ir, esam ieguvuši, ka n^2 arī ir pāra skaitlis, kas ir pretrunā ar doto. Tātad pieņēmums ir aplams un esam pierādījuši, ka n ir nepāra skaitlis.

b) Dots, ka $n^3 + 5$ ir nepāra skaitlis, un ir jāpamato, ka n ir pāra skaitlis. Pieņemsim pretējo, ka n ir nepāra skaitlis. Tas nozīmē, ka n var uzrakstīt formā $n = 2k - 1$, kur k ir naturāls skaitlis. Tad iegūstam

$$\begin{aligned} n^3 + 5 = (2k-1)^3 + 5 &= (2k-1)(2k-1)(2k-1) + 5 = \\ &= 8k^3 - 12k^2 + 6k + 4 = \\ &= 2 \cdot (4k^3 - 6k^2 + 3k + 2). \end{aligned}$$

Iegūts pāra skaitlis, kas ir pretrunā ar doto, ka $n^3 + 5$ ir nepāra. Tātad pieņēmums ir aplams un esam pierādījuši, ka n ir pāra skaitlis.

Piezīme. Binoma kubu $(2k-1)^3$ var ātrāk iegūt, izmantojot formulu $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

c) Dotais apgalvojums ir aplams, jo, ņemot $n = 41$, iegūstam, ka $41^2 - 41 + 41 = 41^2$, kas dalās ar 41, tātad nav pirmskaitlis.

d) Tā kā $4 = 2^2$, tad $4^n - 1 = (2^2)^n - 1 = (2^n)^2 - 1$. Izmantojot kvadrātu starpības formulu, iegūstam, ka $(2^n)^2 - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1)$. Zināms, ka starp katriem trim pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem tieši viens dalās ar 3. No skaitļiem $2^n - 1$, 2^n un $2^n + 1$ skaitlis 2^n noteikti nedalās ar 3, jo visi tā pirmreizinātāji ir divnieki. Tātad ar 3 dalās vai nu $2^n - 1$, vai arī $2^n + 1$, līdz ar to reizinājums $(2^n - 1)(2^n + 1)$ vienmēr dalās ar 3, tas ir, $4^n - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1)$ vienmēr dalās ar 3.

3. Plaknē no punkta O dažādos virzienos novilkti 19 stari. Vai starp tiem noteikti eksistē divi tādi stari, starp kuriem leņķis ir mazāks nekā 19° ?

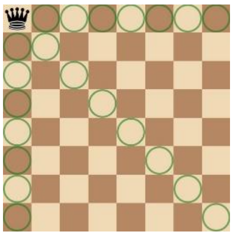
Atrisinājums
Pierādīsim, ka noteikti eksistē tāds leņķis, kas ir mazāks nekā 19°.

Ievērojam, ka mazākie leņķi veidosies, izvēloties divus blakus esošus starus. Ņemot katrus divus blakus esošus starus, iegūstam 19 leņķus ar kopīgu virsotni punktā O. Tie sadala plakni 19 daļās.

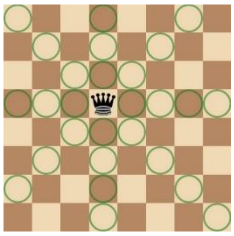
Pieņemsim pretējo, ka no šiem 19 leņķiem neviens nav mazāks kā 19°, tas ir, katrs no leņķiem ir vismaz 19° liels. Tātad šo 19 leņķu summa ir vismaz $19 \cdot 19° = 361°$, bet tā kā šie leņķi aizpilda visu plakni, tad tie veido pilnu leņķi, kura lielums ir $360°$. Iegūta pretruna, tāpēc pieņēmums ir aplams. Tas nozīmē, ka noteikti eksistē divi tādi stari, kuru veidotais leņķis ir mazāks nekā 19°.

4. Uz šaha galdiņa novietotas 44 dāmas. Pierādīt, ka katra no tām apdraud vismaz vienu citu!

Atrisinājums
Pieņemsim pretējo, ka ir tāda dāma, kas neapdraud nevienu citu dāmu.
Vismazāk lauciņu dāma apdraud, ja tā stāv stūra lauciņā (skat., piemēram, 2. att. un 3. att.), tas ir, dāma vienmēr apdraud vismaz 21 lauciņu. Ņemot vērā to, ka dāma neapdraud to lauciņu, uz kura viņa stāv, tad neapdraudēti paliek ne vairāk kā $64 - 21 - 1 = 42$ lauciņi, kur izvietot pārējās 43 dāmas. Iegūta pretruna, tātad pieņēmums ir bijis aplams. Līdz ar to esam pierādījuši, ka katra no dāmām apdraud vismaz vienu citu dāmu.



2. att.



3. att.

5. Kādu dienu Francis aiz garlaicības sāka rakstīt kādu interesantu virkni:

$$\frac{0}{1}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{1}{1}.$$

Tā ir augoša virkne, kuras pirmais loceklis ir 0 un pēdējais loceklis ir 1, bet pārējie virknes locekļi ir nesaīsināmas daļas, kuru saucēji nepārsniedz kādu skaitli, ko sauc par virknes kārtu. Iepriekšējā piemērā Francis bija uzrakstījis 4. kārtas virkni. Pēc kāda laika viņam sanāca uzrakstīt arī 5. kārtas virkni:

$$\frac{0}{1}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{1}{1}.$$

Viņš saskatīja kādu interesantu īpašību – jebkuru divu blakus esošu virknes locekļu saucēju summa pārsniedz virknes kārtu!

a) Pārliecinies arī tu, uzrakstot 7. kārtas virkni!

b) Francis, ilgi domādams, formulēja savu novērojumu apgalvojumā:

Ja ir dota n-tās kārtas virkne, tad jebkuriem diviem blakus esošiem virknes locekļiem $\frac{a}{b}$ un $\frac{c}{d}$ ir spēkā nevienādība $b + d > n$.

Palīdzi viņam pierādīt šo apgalvojumu!

Atrisinājums

a) Septītās kārtas virkne:

$$\frac{0}{1};\ \frac{1}{7};\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{4};\ \frac{2}{7};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{5};\ \frac{3}{7};\ \frac{1}{2};\ \frac{4}{7};\ \frac{3}{5};\ \frac{2}{3};\ \frac{5}{7};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{5};\ \frac{5}{6};\ \frac{6}{7};\ \frac{1}{1}.$$

b) Pieņemsim pretējo – pastāv tāda n-tās kārtas virkne ar blakusesošiem locekļiem $\frac{a}{b}$ un $\frac{c}{d}$, kuriem $b+d \leq n$. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (jo kādam no abiem blakus esošajiem locekļiem jābūt lielākam par otru).

Izmantojot pieņēmumu, ka $b+d \leq n$, mēģināsim atrast tādu daļskaitļi, kura saucējā ir $b+d$ un kurš atrodas starp $\frac{a}{b}$ un $\frac{c}{d}$. (Ja izpildītos $b+d > n$, tad daļskaitlis ar šādu saucēju $b+d$ nepiederētu virknei.) Tādā veidā būs iegūta pretruna ar to, ka $\frac{a}{b}$ un $\frac{c}{d}$ ir blakus esoši virknes locekļi.

Apskatām $\frac{a+c}{b+d}$. Pamatosim, ka $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$. Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{d+b}$$

$$a(d+b) < b(a+c)$$

$$ad + ab < cb + ab$$

$$ad < cb$$

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Tā kā iegūta patiesa nevienādība $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, tad arī sākotnējā nevienādība $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$ ir patiesa.

Līdzīgi rīkojas, lai pamatotu $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$:

$$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

$$d(a+c) < c(b+d)$$

$$ad + cd < cb + cd$$

$$ad < cb$$

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Tā kā iegūta patiesa nevienādība $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, tad arī sākotnējā nevienādība $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ ir patiesa.

Tātad esam ieguvuši, ka $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Tas nozīmē, ka starp $\frac{a}{b}$ un $\frac{c}{d}$ atrodas vēl viens virknes loceklis $\frac{a+c}{b+d}$, bet tas ir pretrunā ar to, ka $\frac{a}{b}$ un $\frac{c}{d}$ ir blakus esoši virknes locekļi. Līdz ar to pieņēmums, ka pastāv tāda n-tās kārtas virkne ar blakus esošiem locekļiem $\frac{a}{b}$ un $\frac{c}{d}$, kuriem $b+d \leq n$, ir aplams un Franča apgalvojums ir pierādīts.

Piezīme. Franča uzrakstīto virkni sauc par Fareja virkni.