"Profesora Cipariņa klubs"

2. nodarbība

Apskatīsim pavisam vienkāršu uzdevumu.

Piemērs. Pēterim ir 3 truši un 2 būri. Visi truši atrodas būros. Vai noteikti kādā no šiem būriem ir vismaz divi truši?

Uz šo jautājumu jūs visticamāk uzreiz atbildēsiet: "Nu, protams!" Ja šāda būra nebūtu, tad Pēterim katrā būrī būtu ne vairāk kā viens trusis. Tātad abos būros kopā būtu ne vairāk kā divi truši, bet Pēterim ir 3 truši. Līdz ar to noteikti ir tāds būris, kurā atrodas vismaz divi truši.

Šo vienkāršo ideju, ka jābūt vismaz vienam būrim ar vismaz diviem trušiem, sauc par **Dirihlē principu** un tas formulējams šādi:

Ja trušu ir vairāk nekā būru, tad vismaz vienā būrī nonāks vairāk nekā viens (tātad vismaz 2) truši.

Brīnumaini, ka tik vienkārša ideja spēj atrisināt daudz sarežģītu uzdevumu!

Piemērs. Katrs punkts plaknē nokrāsots vai nu sarkans, vai zils. Pierādi, ka neatkarīgi no tā, kā veikts krāsojums, vienmēr būs tādi divi punkti, kas viens no otra ir kilometra attālumā un abi nokrāsoti vienā un tajā pašā krāsā!

Atrisinājums. Izvēlamies patvaļīgu punktu, un, nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka tas ir sarkans. Uzzīmēsim riņķa līniju ar centru šajā punktā un rādiusu 1 kilometrs. Ja uz riņķa līnijas atrodas sarkans punkts, tad esam atrisinājuši uzdevumu (tas ir, atraduši meklētos punktus). Ja visi punkti uz riņķa līnijas ir zili, tad no tiem varam atrast divus zilus punktus, kas ir kilometra attālumā.

Tas nemaz nebija grūti, bet arī neizmantoja Dirihlē principu. Šoreiz atrisināsim uzdevumu, izmantojot to.

Alternatīvs atrisinājums. Apskatām vienādmalu trijstūri ar malu garumu 1 kilometrs. Trijstūrim ir trīs virsotnes, bet mums ir dotas divas krāsas. Pēc Dirihlē principa divas no šī trijstūra virsotnēm būs nokrāsotas vienā krāsā.

Ir arī mazliet sarežģītāks formulējums Dirihlē principam, ko daudz biežāk izmanto, risinot uzdevumus. (Apzīmējums $\lceil x \rceil$ nozīmē mazāko veselo skaitli, kas ir lielāks vai vienāds ar x. Piemēram, $\lceil \pi \rceil = 4$.)

Ja ir doti n truši un m būri, tad noteikti ir vismaz viens būris, kurā ir vismaz $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ truši.

Ja tev paveicas, tad ar vienu skaistu Dirihlē principa lietojumu var atrisināt uzdevumu. Bieži vien mums tā nepaveicas. Tieši tāpēc nevajag padoties pēc pirmās reizes, jo dažkārt Dirihlē princips jālieto vairākas reizes, katru reizi iegūstot jaunu informāciju.

Piemērs. Uz šaha galdiņa 10×10 novietots 41 tornis. Pamato, ka noteikti ir pieci torņi, kuri viens otru neapdraud!

Atrisinājums. Kad redzam skaitli 41 kopā ar 10, uzreiz jātur prātā Dirihlē princips, jo 41 ir par viens lielāks nekā $4 \cdot 10$. Tikko Dirihlē princips ir prātā, saskatām, ka $\left\lceil \frac{41}{10} \right\rceil = 5$, kas motivē mūs skatīties tālāk šajā virzienā, jo tas ir torņu skaits, ko mēs meklējam. Šis nav atrisinājums, bet tomēr norāda uz to, ka jāpaskatās mazliet uzmanīgāk.

Mēs meklējam piecus torņus, kuri viens otru neapdraud. Divi torņi viens otru neapdraud, ja tie atrodas dažādās kolonnās un dažādās rindās. Tātad mums jāatrod pieci torņi, kas katrs atrodas citā kolonnā un citā rindā. Mēs varētu atrast piecas rindas, kas satur daudz torņu, lai varētu no katras rindas izvēlēties kādu, kas atrodas dažādās kolonnās. Kopā ir 10 rindas un 41 tornis. Pēc Dirihlē principa varam secināt, ka vienā rindā ir vismaz $\left\lceil\frac{41}{10}\right\rceil = 5$ torņi. Vai mēs varam atkārtoti lietot Dirihlē principu? Protams! Mēs esam izolējuši rindu ar vismaz pieciem torņiem. Noņemsim to. Šādā veidā esam noņēmuši ne vairāk kā 10 torņus. Līdz ar to paliek vismaz 31 tornis un 9 rindas. Tagad meklēsim citu rindu ar daudz torņiem. Pēc Dirihlē principa secinām, ka jābūt rindai ar vismaz $\left\lceil\frac{31}{9}\right\rceil = 4$ torņiem.

Esam ieguvuši stratēģiju. Noņemot šo rindu un atkal lietojot Dirihlē principu, meklējam pārējās rindas ar daudz torņiem. Šādā veidā turpinot, varam atrast vēl rindu, kur būs vismaz 3 torņi, tad vēl vienu ar vismaz 2 torņiem un visbeidzot – ar vismaz 1 torni. (Pārliecinies par šo!)

Esam atraduši piecas īpašas rindas attiecīgi ar vismaz 5, 4, 3, 2 un 1 torni. Tagad varam izveidot "pacifistu piecinieku". Vispirms izvēlas torni no tās rindas, kurā ir vismaz 1 tornis, nākamo – no tās rindas, kurā ir vismaz 2 torņi, tad – no tās rindas, kur ir vismaz 3 torņi utt. Katru reizi varam atrast torni, kas atrodas citā kolonnā nekā jau izvēlētie, jo katrā solī kolonnu izvēļu skaits ir lielāks nekā jau izvēlēto torņu skaits. Šādi esam atraduši piecus torņus, kas savā starpā viens otru neapdraud.

Dirihlē principa uzdevumu risināšana bieži vien ir trīs soļu process:

1. saskati, ka uzdevumā varētu lietot Dirihlē principu;
2. saproti, kas uzdevumā ir "truši" un kas – "būri" (šis bieži vien ir grūtākais risinājumā);
3. pēc Dirihlē principa lietošanas, noteikti vēl kaut kas jāizdara, jo dažreiz Dirihlē princips dod tikai vienu soli risinājumā.

Katru reizi, kad saskati Dirihlē principu, centies uzdevumu veikt eleganti! Mēģini nodefinēt "trušus" un "būrus" tā, lai risinājums būtu īss! Ja tas nestrādā, tad nepadodies! Izmanto Dirihlē principu vienreiz, lai gūtu atbalstu tālākam risinājumam, un turpini to lietot, lai iegūtu papildu informāciju!

Uzdevumi

1. Pierādi šo Dirihlē principa variantu:

Ja ir doti n truši un m būri, tad noteikti ir vismaz viens būris, kurā ir vismaz $\left\lceil\frac{n}{m}\right\rceil$ truši.

2. Regulāra sešstūra, kura malas garums ir 1, iekšpusē atzīmēti septiņi punkti. Pierādi, ka noteikti var atrast divus tādus punktus, starp kuriem attālums nav lielāks kā 1.

3. Skaitli $\frac{1}{n}$, kur n – naturāls skaitlis, pārveidoja par bezgalīgu decimāldaļu. Pierādi, ka iegūta bezgalīga periodiska decimāldaļa!

4. Šarlote nolēmusi astoņas nedēļas gatavoties šautriņmešanas turnīram. Viņa plānojusi katru dienu izspēlēt vismaz vienu spēli, bet ne vairāk kā 11 spēles nedēļā. Pierādi, ka noteikti varēs atrast tādas secīgas dienas, kurās kopā būs izspēlētas tieši 23 spēles!

5. Teodors ar saviem draugiem aizgāja pusdienās kādā interesantā vietā, kur visi sēž pie apaļa galda, kas spēj rotēt. Katrs no viņiem pasūtīja ēdienu, kas atšķiras no pārējo izvēlēm. Pēc ēdiena atnešanas sanācis tā, ka neviens nesēž pretī savam ēdienam. Pierādi, ka var pagriezt galdu tā, lai vismaz diviem būtu pretī savs ēdiens.