

Jauno matemātiķu konkurss

2018./2019. mācību gads

1. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Rudens rēbuss

Ieraksti ciparus 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 un 9 tukšajās rūtiņās tā, lai iegūtu patiesu izteiksmi! (*ievēro darbību secību!*)

		-		66
+	·		-	=
13	12		11	10
·	+		+	-
:		+	·	:

Atrisinājums. Uzdevumam ir vairāki atrisinājumi, taču pietiek uzrādīt tikai vienu no tiem. Četri no iespējamajiem atrisinājumiem:

9	6	-	7	66
+	·		-	=
13	12		11	10
·	+		+	-
4	5		1	2
:	8	+	·	3
			:	

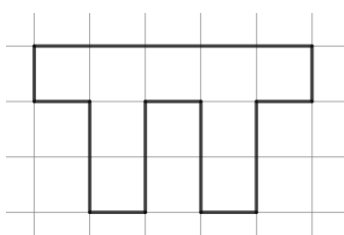
5	2	-	7	66
+	·		-	=
13	12		11	10
·	+		+	-
4	9		8	6
:	1	+	·	3
			:	

5	2	-	1	66
+	·		-	=
13	12		11	10
·	+		+	-
9	6		8	4
:	3	+	·	7
			:	

6	2	-	5	66
+	·		-	=
13	12		11	10
·	+		+	-
3	9		8	4
:	1	+	·	7
			:	

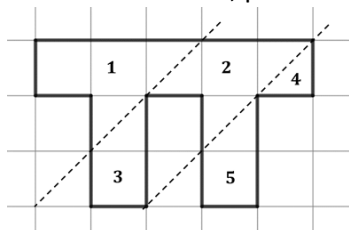
2. Grieķu alfabēts

Ar diviem taisniem griezieniem sagriez grieķu alfabēta burtu π (skat. 1. att.) piecās daļās tā, lai no tām var salikt kvadrātu!

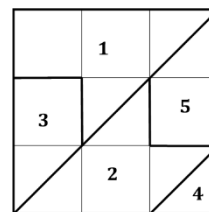


1. att.

Atrisinājums. Prasīto var izdarīt, piemēram, kā parādīts 2. att., tad no iegūtajām daļām var salikt kvadrātu, skat. 3. att



2. att.



3. att.

3. Daļu virkne

Emīls, lasot grāmatu, atrada informāciju par kādu skaitļu virkni. Tā ir augoša virkne, kuras pirmais loceklis ir 0 un pēdējais ir 1, bet pārējie virknes locekļi ir nesaīsināmas daļas, kuru saucēji nepārsniedz kādu skaitli, ko sauc par virknes kārtu. Grāmatā bija uzrakstīta 4. kārtas virkne:

$$0; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; 1.$$

Mazliet apdomādams, Emīls, uzrakstīja arī 5. kārtas virkni:

$$0; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; 1.$$

a) Uzraksti 8. kārtas virkni!

b) Pamato, ka katrai nākamajai virknei, sākot ar 2. kārtas virkni, ir vismaz par diviem locekļiem vairāk nekā iepriekšējai!

c) Vai eksistē tāda virkne, kurā ir tieši 30 locekļi?

Atrisinājums

a) Astotās kārtas virkne:

$$0; \frac{1}{8}; \frac{1}{7}; \frac{1}{6}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{2}{7}; \frac{1}{3}; \frac{3}{8}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{4}{7}; \frac{3}{5}; \frac{5}{8}; \frac{2}{3}; \frac{4}{5}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \frac{7}{8}; 1.$$

b) Katrā nākamajā virknē būs visi $(k - 1)$ -ās (iepriekšējās) kārtas locekļi un noteikti klāt nāks vismaz divi jauni locekļi $\frac{1}{k}$ un $\frac{k-1}{k}$, kur $k > 2$, k – virknes kārtas skaitlis. Virknes loceklis $\frac{k-1}{k}$ nav bijis iepriekšējā virknē, jo tā ir nesaīsināma daļa tāpēc, ka $(k - 1)$ un k ir savstarpēji pirmskaitļi. Līdz ar to, katrā nākamās kārtas virknē būs vismaz par diviem locekļiem vairāk nekā iepriekšējā.

c) Nē, tādas virknes nav. Apskatām devītās un desmitās kārtas virkni:

$$0; \frac{1}{9}; \frac{1}{8}; \frac{1}{7}; \frac{1}{6}; \frac{1}{5}; \frac{2}{9}; \frac{1}{4}; \frac{3}{8}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{4}{9}; \frac{3}{7}; \frac{5}{8}; \frac{2}{3}; \frac{4}{5}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \frac{7}{8}; \frac{8}{9}; 1$$

$$0; \frac{1}{10}; \frac{1}{9}; \frac{1}{8}; \frac{1}{7}; \frac{1}{6}; \frac{1}{5}; \frac{2}{9}; \frac{1}{4}; \frac{3}{10}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{4}{9}; \frac{3}{7}; \frac{5}{8}; \frac{2}{3}; \frac{6}{10}; \frac{5}{7}; \frac{4}{9}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \frac{7}{8}; \frac{8}{9}; \frac{9}{10}; 1$$

Devītās kārtas virknē ir 29 locekļi, bet desmitās kārtas virknē ir 33 locekļi. Tā kā virknes locekļu skaits palielinās, ja palielinās virknes kārtas, tad nav tādas virknes, kurā būtu tieši 30 locekļi.

4. Gada skaitlis

Kādiem divciparu skaitļiem A un B , kuru pēdējais cipars sakrīt, izpildās vienādība $A^2 + B^2 = 2018$?

Atrisinājums. Vienādība izpildīsies tikai skaitļiem 13 un 43, tas ir,

$$13^2 + 43^2 = 169 + 1849 = 2018.$$

Pamatosim, ka citiem divciparu skaitļiem dotā vienādība nav patiesa. Noskaidrosim, kādi var būt skaitļu A^2 un B^2 pēdējie cipari (skaitļa kvadrāta pēdējo ciparu ietekmē tikai paša skaitļa pēdējais cipars).

Skaitļa pēdējais cipars	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Skaitļa kvadrāta pēdējais cipars	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Lai summas $A^2 + B^2$ pēdējais cipars būtu 8, derēs tikai tādi skaitļi A^2 un B^2 , kuru pēdējais cipars ir 4 vai 9, tas nozīmē, ka A un B pēdējais cipars var būt 2, 3, 7 vai 8.

Ievērojām, ka $45^2 = 2025 > 2018$, tātad neviens no abiem skaitļiem nav lielāks kā 45.

Apskatām visus variantus, kāds var būt viens no skaitļiem.

A	A²	2018 – A²	Secinājums
12	144	1874	Nav skaitļa kvadrāts
22	484	1534	Nav skaitļa kvadrāts
32	1024	994	Nav skaitļa kvadrāts
42	1764	254	Nav skaitļa kvadrāts
13	169	1849	$1849 = 43^2$ un $B = 43$
23	529	1489	Nav skaitļa kvadrāts
33	1089	929	Nav skaitļa kvadrāts
43	1849	169	$169 = 13^2$ un $B = 13$
17	289	1729	Nav skaitļa kvadrāts
27	729	1289	Nav skaitļa kvadrāts
37	1369	649	Nav skaitļa kvadrāts
18	324	1694	Nav skaitļa kvadrāts
28	784	1234	Nav skaitļa kvadrāts
38	1444	574	Nav skaitļa kvadrāts

Līdz ar to esam pamatojuši, ka vienīgie divciparu skaitļi, kam izpildās dotā vienādība, ir 13 un 43.

5. Misija "Tilts"

Nakts vidū četri aģenti – Trakais Trusis, Apšulapa, Blondais Dadzis un Lēnais Ezis – nonāca pie tilta. Viņiem 17 minūšu laikā ir jātiek tiltam otrā pusē. Vienlaicīgi tiltu drīkst šķērsot ne vairāk kā divi aģenti, turklāt, šķērsojot tiltu, vienmēr jābūt līdz lukturītim. Diemžēl viņiem ir tikai viens lukturītis, un lukturīti drīkst pārvietot tikai turot rokā (to nedrīkst mest u.tml.). Trakais Trusis tiltu var šķērsot 1 minūtē, Apšulapa – 2 minūtēs, Blondais Dadzis – 5 minūtēs un Lēnais Ezis – 10 minūtēs. Divi aģenti, kas iet vienlaicīgi, šķērso tiltu tik minūtēs, cik minūtēs to šķērsotu lēnākais no pāra. Piemēram, Trakais Trusis un Lēnais Ezis turpceļā šķērsotu tiltu 10 minūtēs, ja Lēnais Ezis ar lukturīti atgrieztos arī atpakaļ, tad kopā būtu pagājušas 20 minūtes un misija būtu izgāzusies. Vai aģenti var šķērsot tiltu 17 minūtēs?

Atrisinājums. Jā, aģenti var šķērsot tiltu 17 minūtēs. Lai misija izdotos, pirmajiem tiltu jāšķērso Trakajam Trusim un Apšulapai (2 minūtes). Tad Trakajam Trusim jāatgriežas ar lukturi (1 minūte). Tad tiltam pāri jādodas Blondajam Dadzim un Lēnajam Ezim (10 minūtes), savukārt lukturi atpakaļ atnesīs Apšulapa (2 minūtes), kas jau atrodas tilta otrā pusē. Pēdējie tiltu atkal šķērso Trakais Trusis un Apšulapa (2 minūtes). Līdz ar to kopējais patērētais laiks misijai būs $2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17$ minūtes.