Punktiņš. (B grupa) Atrodi pārskaitļus un nepārskaitļus!

9.11.2018

Īsi atrisinājumi un komentāri

1. (*Iesildīšanās uzdevums*) Māris sareizināja divus skaitļus ar abu skaitļu summu un ieguva 819. Mārtiņš teica, ka Māris ir kļūdījies. Kuram ir taisnība?

Atrisinājums. Divu skaitļu A un B summa būs nepāra skaitlis, ja skaitļiem A un B būs atšķirīga paritāte. Bet tad viens no tiem būs pārskaitlis. Ja A un B ir abi nepāra skaitļi, tad to summa būs pārskaitlis. Jebkurā gadījumā dotā reizinājuma $A \cdot B \cdot (A + B)$ rezultāts būs pārskaitlis, kas nevar būt 819.

2. (*Iesildīšanās uzdevums*) Emīls uz tāfeles uzrakstīja tādus 345 naturālus skaitļus, kuru summa ir pāra skaitlis. Vai Miķelis var nodzēst vienu skaitli tā, lai atlikušo 344 skaitļu summa arī ir pāra skaitlis? Ja Miķelim tas izdevās, vai Emīls tagad arī var nodzēst vienu skaitli tā, lai atlikušo 343 skaitļu summa ir pārskaitlis?

Atrisinājums. Ja visu skaitļu summa ir pārskaitlis, tad starp tiem ir vismaz viens pārskaitlis. Miķelis var nodzēst pārskaitli, atlikušo skaitļu summa joprojām būs pārskaitlis. Ja Emīls ir uzrakstījis tikai vienu pārskaitli, tad pēc Miķeļa gājiena būs atlikuši visi tikai nepāra skaitļi. Nodzēšot vienu no nepāra skaitļiem, paliks nepāra skaits nepāra skaitļu. To summa būs nepārskaitlis.

3. Atrodi 4 dažādus naturālus skaitļus, ka jebkuru šo skaitļu izlases summa dalās ar izlases skaitu. Piemēram, ja izvēlas 3 skaitļus, tad to summa dalās ar 3.

Atrisinājums. Vienkāršu piemēru var iegūt, ja izvēlas visus 4 pārskaitļus, tādus, kas dalās ar 3. Piemēram, 6, 12, 24, 48.

Izaicinājums ir iekļaut šajā komplektā vismaz vienu nepāra skaitli. No dotā seko, ka visiem 4 skaitļiem ir vienāda paritāte (jo jebkuru divu skaitļu summa dalās ar 2). Ja ņemsim visus tādus nepāra skaitļus, kas dalās ar 3, uzdevums ir atrisināts. Piemēram, izvēlēsimies 15, 21, 27 un 33. To summa ir 96, kas dalās ar 4.

Vai var izvēlēties tādus nepāra skaitļus, kas nedalās ar 3? Vadoties pēc skaitļu dalāmības ar 3, tos var iedalīt 3 grupās:

Skaitļi, kuri dalās ar 3 : 3, 6, 9, 12 , 15, ….

Skaitļi, kuru atlikums, dalot ar 3, ir 1: 1, 4, 7, 10, 13, …

Skaitļi, kuru atlikums, dalot ar 3, ir 2: 2, 5, 8, 11, 14, …

Jebkuru 3 skaitļu summa no vienas grupas dalās ar 3. Pamatosim to algebriski.

Ir 3 skaitļi, piemēram, no otrās grupas, kurus var izteikt sekojoši:

$3a + 1$; $3b + 1$; $3c + 1$. To summa $3a + 1 + 3b + 1 + 3c + 1 = 3(a + b + c) + 3$.

Summa dalās ar 3. Līdzīgi arī aplūkojot skaitļus no trešās grupas.

Ja aplūkojam doto 4 skaitļu visas izlases pa 3, tad skaidrs, ka šos skaitļus ir jāizvēlas no vienas grupas, piemēram, 1, 7, 13, 19. To summa ir 40, kas dalās ar 4. Vai, piemēram, 5, 11, 17, 23 (to summa ir 56, kas dalās ar 4).

4. Pierādi, ka nepāra skaitļa kvadrāta summa ar pāra skaitli ir nepāra skaitlis!

Atrisinājums. Nepāra skaitli apzīmēsim $2n + 1$, bet pāra skaitli apzīmēsim $2m$. Tad darbība ir

$$(2n+1)^2 + 2m = 4n^2 + 4n + 1 + 2m = 2(2n^2 + 2n + m) + 1 = 2(N) + 1$$

Iegūtais rezultāts ir nepāra skaitlis.

5. Kādiem naturāliem skaitļiem *n* ir spēkā apgalvojums, ka katru *n* pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summa dalās ar *n*?

Atrisinājums. Aplūkosim *n* naturālu skaitļu summu no 1 līdz *n*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n+1}{2} \cdot n$$

Šī summa dalīsies ar *n* tikai tad, ja *n* ir nepāra skaitlis, jo skaitlim ($n + 1$) jābūt pārskaitlim.

Ja summē *n* secīgus naturālus skaitļus, sākot ar skaitli $m = a + 1$, tad to summa

$$(a+1) + (a+2) + (a+3) + \cdots + (a+n) = n \cdot a + \frac{n+1}{2} \cdot n$$

arī dalīsies tikai tad, ja *n* ir nepāra skaitlis.

6. Mazā blusiņa lec pa rūtiņu taisni. Pirmais lēciens ir 1 rūtiņa, otrais lēciens ir 2 rūtiņas, trešais 3, un ar katru nākamo lēcienu tas pagarinās par vienu rūtiņu. Vai ir iespējams, a) ka pēc 110 (vai *13*) lēcieniem blusiņa nonāk sākuma punktā? b) pēc 111 (vai *12*) lēcieniem?

Piezīme. Ja skaitļi 110 un 111 šķiet pārāk lieli, lai izpildītu uzdevumu, to vietā var izvēlēties mazākus skaitļus 13 un 12.

Atrisinājums. a) Ar 110 lēcieniem blusiņa nevar nonākt sākuma punktā. Lai tas būtu iespējams, lēcienu kopējam garumam vienā virzienā ir jāsakrīt ar lēcienu kopējo garumu otrā virzienā. No tā seko, ka visu lēcienu garumu kopējā summa ir pāra skaitlis. Bet skaitļu summa no 1 līdz 110 ir nepāra skaitlis: 1 + 2 + 3 + …+ 110 = 6105 (skat. 5. uzdevuma formulu)

b) Ar 111 lēcieniem blusiņa var nonākt sākuma punktā. Skaitļu summa no 1 līdz 111 ir 6216. Tad kopējais lēcienu garums vienā virzienā ir 3108 un otrā virzienā arī ir 3108. Ievērosim, ka skaitļu summa no 1 + 2 + 3 +…+79 = 3160. Bet atlikušo lēcienu kopējais garums ir 3056. Lai blusiņa varētu atgriezties sākuma punktā, viņai ir vairākas reizes jāmaina lēkšanas virziens. Piemēram, viņa lec uz priekšu, tad 34-to lēcienu lec atpakaļ, tad atkal uz priekšu, tad 70-to lēcienu atpakaļ, tad uz priekšu. Pēc 79-tā lēciena blusiņa būs 3056 rūtiņu attālumā no sākuma punkta. Sākot ar 80 lēcienu blusiņa lec tikai atpakaļ.

Var pamatot, ka blusiņai jāmaina virziens vairāk kā vienu reizi. Pieņemsim pretējo, ka blusiņa iesākumā lec tikai uz priekšu, tad tikai atpakaļ un nonāk izejas punktā. Tad lēcienu kopējais garums uz priekšu sakrīt ar lēcienu garumu atpakaļ. Ja viņa lec *n* lēcienus uz priekšu, tad

$$\frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{n+1+111}{2} \cdot (11-n)$$

Iegūstam kvadrātvienādojumu

$$2n^2 + n - 111 \cdot 112 = 0$$

Šim kvadrātvienādojumam nav reālu sakņu. Tāpēc blusiņai vairākas reizes jāmaina lēkšanas virziens, lai nonāktu sākuma punktā pēc 111 lēcieniem.

7. Doti četri naturāli skaitļi, kas a>b>c>d. Pierādi, ka reizinājums

   (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) dalās ar 12.

Atrisinājums. Jānovērtē skaitļu starpību pāra un nepāra īpašības. Ja visi dotie skaitļi ir ar vienādu paritāti, reizinājums dalās ar 4. Ja diviem skaitļiem ir vienāda paritāte un otriem diviem ir otra paritāte, tad reizinājums dalās ar 4. Ja ir viens skaitlis, kuram ir citāda paritāte nekā 3 atlikušajiem, tad šie 3 skaitļi ar vienādu paritāti, tie veido 3 pārus, tāpēc 3 starpības būs pāra skaitļi, tātad reizinājums dalās ar 4.

Dalāmībai ar 3 aplūkosim sekojošas grupas (kā trešajā uzdevumā):

1) Skaitļi kuri dalās ar 3:   3, 6, 9, 12, 15, …
2) Skaitļi, kurus dalot ar 3, iegūst atlikumu 1: 1, 4, 7, 10, 13, ….
3) Skaitļi, kurus dalot ar 3, iegūst atlikumu 2: 2, 5, 8, 11, 14, …

No dotajiem četriem skaitļiem vismaz divi būs no vienas šādas grupas. Viņu starpība dalīsies ar 3.