

"Profesora Cipariņa klubs"

3. nodarbība

Kad sāk risināt uzdevumu, ļoti grūti izdomāt, kam ķerties klāt. Kā esam jau pamanījuši, bieži vien jāseko līdzīgi daudziem (pat iespējams bezgalīgi daudziem) elementiem. Problēmu risinātāji vienmēr cenšas sakārtot šo lielo masu informācijas. Fundamentāla taktika šim ir **ekstremālā elementa metode**:

Ja iespējams, pieņem, ka problēmas lielumi ir sakārtoti. Pievērš īpašu uzmanību "lielākajam" un "mazākajam" lielumam šajā sakārtojumā, jo tie vistīcamākais saturēs svarīgāko informāciju.

Kā jau visas metodes arī šī skan ļoti vienkārši, bet šī atziņa atrisina daudzus uzdevumus.

Piemērs. Bezgalīga šaha galdiņa katrā lauciņā ierakstīts naturāls skaitlis tā, ka katrs no tiem ir četru blakus lauciņu ierakstīto skaitļu vidējais aritmētiskais (lauciņus sauc par blakus lauciņiem, ja tiem ir kopīga mala). Pierādīt, ka visi ierakstītie skaitļi ir vienādi!

Atrisinājums. Mēs zinām, ka naturālos skaitļus var sakārtot, tāpēc šeit ir viegli saskatīt ekstremālos elementus. Tā kā ir bezgalīgi daudz skaitļu, lielāko elementu mēs nevaram izvēlēties, jo tas var būt neierobežots (kāds ir lielākais naturālais skaitlis?). Vienīgā mūsu izvēle ir mazākais skaitlis šaha galdiņā, kas noteikti eksistē, jo nav mazāka naturāla skaitļa kā 1.

Apskatām mazāko ierakstīto skaitli. Tā kā šis ir mazākais, tad varam apskatīt, kādi būtu viņa "kaimiņi". Uzreiz skaidrs, ja kāds no kaimiņiem ir lielāks nekā mūsu mazākais elements, tad, lai izpildītos prasītā īpašība (katrs skaitlis ir četru blakus lauciņu ierakstīto skaitļu vidējais aritmētiskais), nepieciešams, ka kāds no kaimiņiem būtu vēl mazāks nekā mazākais skaitlis. Tā ir pretruna. Tātad pieņēmums, ka kāds no blakus lauciņiem satur lielāku (mazāku) skaitli, ir aplams. Esam spiesti tad rakstīt vienādus skaitļus katrā blakus lauciņā. Izdarot līdzīgus spriedumus, iegūstam, ka blakus lauciņu blakus lauciņos arī ierakstīti vienādi skaitļi utt. Esam pamatojuši to, ka visi ierakstītie skaitļi ir vienādi.

Atpazīt, kad lietot ekstremālā elementa metodi, ne vienmēr ir tik vienkārši kā šajā piemērā. Šeit mums bija doti konkrēti skaitļi, bet var būt uzdevumi, kur tie var būt slēpti (trijstūru laukumi utt.) tāpat kā Dirihlē principā truši un būri.

Risinot uzdevumus, ir vērts turēt prātā pāris lietas:

1. Jebkura galīga skaitļu kopa satur lielāko un mazāko elementu;
2. Jebkura naturālu skaitļu apakškopa (arī bezgalīga) satur mazāko elementu.
3. Ja eksistē mazākais (lielākais), tad, vistīcamākais, eksistē arī otrs mazākais (lielākais), jo bieži vien nepietiek apskatīt tikai vienu elementu.

Uzdevumi

1. Uz galda ir kaut kāds skaits kartīšu (vismaz 4). Uz katras kartītes uzrakstīts naturāls skaitlis, visi uzrakstītie skaitļi ir dažādi. Vai katrām divām no šīm kartītēm a un b var atrast citas divas c un d tā, lai uz tām uzrakstīto skaitļu summas būtu vienādas $a + b = c + d$?
2. Doti naturālie skaitļi no 1 līdz 75. Pierādīt, ka no tiem (tos neatkārtojot) nevar izvēlēties 55 skaitļus tā, lai to summa būtu vienāda ar atlikušo 20 skaitļu summu!
3. Kādā vasaras dienā Jana ar saviem draugiem izlēma spēlēties ar ūdens baloniem. Viņi papildīja balonus ar ūdeni un gāja klajā laukā. Katrs paņēma balonu un aizgāja nostāties laukā tā, lai attālums starp jebkuriem diviem cilvēkiem būtu atšķirīgs. Pēc signāla katrs meta ar balonu sev tuvākajam cilvēkam. Pierādīt, ka noteikti būs tādi divi cilvēki, kas meta viens otram!

4. Tomass palīdzēja skolai veidot papīra rotājumus Ziemassvētkiem. Kad viss bija pabeigts, viņa galds bija pilnībā noklāts ar 10 dažādiem papīra izgriezumiem. Daži pārklājās viens ar otru, bet daži pat pārkarājās pāri galdam. Tomasam bija skaidrs, ka jāsakārto galds, bet viņš sevi izaicināja. Tomass grib noņemt no galda pusi no papīra izgriezumiem tā, lai vismaz puse no galda vēl būtu noklāta ar atlikušajiem izgriezumiem. Vai viņam vienmēr tas var izdoties?

5. Trasē stāv 21 identiska mašīna. Zināms, ka tām visām kopā ir pietiekoši daudz benzīna, lai viena mašīna varētu apbraukt tikai vienu apli. Pamatot, ka var atrast tādu mašīnu, kura var veikt vienu apli, ja tā paņem benzīnu no katras stāvošās mašīnas, ko apbrauc!