"Profesora Cipariņa klubs"

2. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

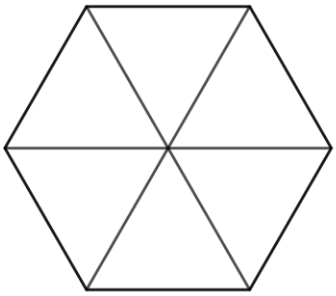
1. Pierādi šo Dirihlē principa variantu:

> Ja ir doti n truši un m būri, tad noteikti ir vismaz viens būris, kurā ir vismaz $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ truši.

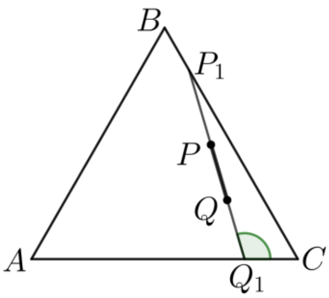
Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka katrā būrī ir mazāk nekā $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ truši. Trušu skaits katrā būrī ir vesels skaitlis un arī $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ ir vesels skaitlis. Lielākais veselais skaitlis, kas ir mazāks nekā $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$, ir $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil - 1$, tātad trušu skaits katrā būrī nedrīkst pārsniegt šo skaitli. Tā kā $\frac{n}{m} > \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil - 1$ (pretējā gadījumā, ja $\frac{n}{m} \le \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil - 1$, tad $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil - 1$ (vai iespējams kāds vēl mazāks vesels skaitlis) būtu mazākais veselais skaitlis, kas lielāks vai vienāds ar $\frac{n}{m}$, nevis $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$), tad katrā būrī jābūt mazāk nekā $\frac{n}{m}$ trušiem, un tā kā kopā ir m būri, tad kopā visos būros būs mazāk nekā $\frac{n}{m} \cdot m = n$ truši. Iegūta pretruna, jo visos būros kopā ir n truši. Tātad vismaz vienā būrī jābūt vismaz $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ trušiem.

2. Regulāra sešstūra, kura malas garums ir 1, iekšpusē atzīmēti septiņi punkti. Pierādi, ka noteikti var atrast divus tādus punktus, starp kuriem attālums nav lielāks kā 1.

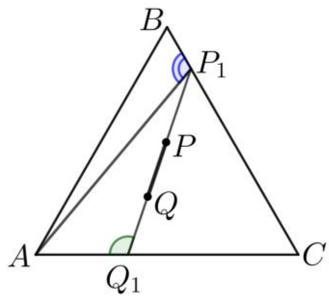
Atrisinājums. Sadalām regulāro sešstūri sešos regulāros trijstūros ar malu garumiem 1 (skat. 1. att.). Tā kā doti 7 punkti un 6 trijstūri, tad pēc Dirihlē principa ir tāds trijstūris, kurā atrodas vismaz divi punkti (ieskaitot trijstūra kontūru). Tātad jāpamato, ka attālums starp šiem diviem trijstūra punktiem nav lielāks kā 1.



1. att.



2. att.



3. att.

Apzīmējam šos divus patvaļīgos punktus, kas atrodas vienā regulārajā trijstūrī, ar P un Q. Tad pagarinām nogriezni PQ līdz tas krusto trijstūra ABC malas. Krustpunktu ar malu BC apzīmēsim ar P_1 un krustpunktu ar malu AC ar Q_1 (skat. 2. att.). Pieminēsim, ka vienmēr varam pārsaukt trijstūra ABC virsotnes tā, lai punkti P_1 un Q_1 atrastos tieši uz šīm malām. Lai pamatotu, ka nogrieznis PQ nav garāks kā 1, pietiks, ja pamatosim, ka nogrieznis P_1Q_1 nav garāks kā 1, jo nogrieznis PQ ietilpst P_1Q_1, tas ir, $PQ < P_1Q_1$.
Izmantosim zināmu īpašību, ka trijstūrī pret lielāko leņķi atrodas garākā mala. Sadalīsim pierādījumu divos gadījumos.
1. Ja $\sphericalangle P_1Q_1C \ge 90°$ (skat. 2. att.), tad $P_1Q_1 < P_1C \le BC = 1$. Šajā gadījumā esam pamatojuši, ka attālums starp P un Q (nogriežņa PQ garums) nav lielāks kā 1.
2. Ja $\sphericalangle P_1Q_1C < 90°$ (skat. 3. att.), no kā izriet, ka $\sphericalangle AQ_1P_1 \ge 90°$ kā blakusleņķis. Tātad $AP_1 > P_1Q_1$, jo mala A_1P_1 atrodas pret plato leņķi. Tā kā blakusleņķu summa ir 180°, tad viens no blakusleņķiem ir vismaz 90°. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka $\sphericalangle CP_1A \ge 90°$, tātad $AP_1 < AB = 1$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $PQ < P_1Q_1 < AP_1 < AB = 1$.
Šie abi gadījumi izsmeļ visus iespējamos gadījumus, tāpēc varam secināt, ka vienādmalu trijstūrī attālums starp jebkuriem diviem punktiem nav lielāks kā 1.

3. Skaitli $\frac{1}{n}$, kur n – naturāls skaitlis, pārveidoja par bezgalīgu decimāldaļu. Pierādi, ka iegūta bezgalīga periodiska decimāldaļa!

Atrisinājums. Apskatām patvaļīgu naturālu skaitli n. Gadījumā, ja $n = 1$, tad nav ko apskatīt, jo mēs iegūstam $1,(0)$ ar bezgalīgu periodu, kas sastāv no nullēm, tāpēc varam pieņemt, ka $n > 1$.

Lai zinātu, kā rīkoties tālāk, jāatceras, kā notiek dalīšana "stabiņā". Ja mūsu dalītājs ir lielāks par dalāmo, kas arī sakrīt ar mūsu gadījumu, mēs dalāmo pareizinām ar 10, izdalām ar dalītāju n, pilno dalījumu uzrakstam "pa labi aiz komata", izrakstām atlikumu no dalījuma, kas kļūst par jauno dalāmo, un atkārtojam šo procedūru līdz atlikums ir 0 vai arī saskatīts periods. Šo procesu varam aprakstīt šādi:

$$\begin{aligned} 10 &= d_1 n + a_1 \\ 10a_1 &= d_2 n + a_2 \\ 10a_2 &= d_3 n + a_3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Skaitļi d_i būs tie skaitļi, kas tiks rakstīti aiz komata i-tajā pozīcijā jeb $\frac{1}{n} = 0, d_1 d_2 d_3 d_4 \dots$.

Skaitļi a_i ir dalījuma atlikums. Lai pamatotu, ka iegūtais dalījums būs bezgalīga periodiska decimāldaļa, pietiek ar to, ka mēs pamatojam, ka, sākot ar kādu naturālu skaitli K, visiem naturālajiem skaitļiem k, kas ir lielāki nekā K, būtu spēkā $d_k = d_{k+p}$, kur p ir perioda garums. Ar to mēs pamatotu, ka cipari aiz komata sāk atkārtoties periodiski. Lai tas būtu spēkā, nepieciešams, ka $a_K = a_{K+p}$, jo šie skaitļi pilnībā nosaka dalījumu:

$$\begin{aligned} 10a_K &= d_{K+1} n + a_{K+1} \\ 10a_{K+p} &= d_{K+p} n + a_{K+p}. \end{aligned}$$

Tas nozīmē, ka, ja atkārtojas atlikumi, tad atkārtosies skaitļi d_i, kas arī beigās veidos decimāldaļas periodu. Tātad esam nonākuši līdz tam, ka jāpamato, ka atlikumi atkārtosies. Tā kā, dalot ar n, var iegūt tikai n dažādus atlikumus $(0, 1, 2, \dots, n-1)$, tad dalīšanas procesā pirmajos $(n+1)$ soļos pēc Dirihlē principa noteikti parādīsies vismaz divi dalījumi ar vienādiem atlikumiem. Solis, kurā pirmo reizi parādās atlikums, kurš atkārtojas, būs mūsu K-tais solis, un visi dalījumi pirms šī soļa veidos priekšperiodu. Tā kā šie atlikumi viennozīmīgi nosaka dalījuma nākamo soli (reizinām atlikumu ar 10 un izdalām ar n), skaitļi, kas rodas dalīšanas procesā un tiek rakstīti decimāldaļā, arī atkārtosies. Šādi tiek veidots periods un mēs iegūstam bezgalīgi periodisku decimāldaļu.

4. Šarlote nolēmusi astoņas nedēļas gatavoties šautriņmešanas turnīram. Viņa plānojusi katru dienu izspēlēt vismaz vienu spēli, bet ne vairāk kā 11 spēles nedēļā. Pierādi, ka noteikti varēs atrast tādas secīgas dienas, kurās kopā būs izspēlētas tieši 23 spēles!

Atrisinājums. Apskatīsim skaitļu virkni, kas apraksta, cik spēļu jau ir izspēlēts līdz n-tajai dienai (ieskaitot), un apzīmēsim atbilstošos skaitļus ar a_n. Tā kā katru dienu tiek izspēlēta vismaz viena spēle, tad šajā virknē ir 56 atšķirīgi skaitļi un a_{56} nepārsniegs 88, jo Šarlote gatavojās 8 nedēļas:

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{56} \leq 88.$$

Lai pamatotu, ka varēs atrast secīgas dienas, kurās kopā būs izspēlētas tieši 23 spēles, atliek atrast tādus divus virknes locekļus, kuri atšķiras tieši par 23. Tā kā par starpībām ir grūtāk spriest nekā tad, ja jāpamato, vai vērtības sakrīt, izveidosim papildu virkni $b_n = a_n + 23$, kas satur locekļus a_n, kuriem pieskaitīts 23. Tagad tikai jāpārbauda, vai kāds no virknes a_n locekļiem sakrīt ar kādu no virknes b_n locekli. Jāpiemin, ka virkne b_n var saturēt skaitļus no 24 līdz 111. Tā kā mums kopā ir 112 skaitļi (56 no virknes a_n un 56 no b_n) un 111 vērtības (no 1 līdz 111), ko tie var pieņemt, tad pēc Dirihlē principa secinām, ka var atrast divus vienādus skaitļus. Tātad esam atraduši divus virknes locekļus, kuru vērtības atšķiras tieši par 23. Tā kā katrā virknē nav divu vienādu skaitļu, tad vienādie var būt tikai viens no virknes a_n , bet otrs no virknes b_n. Skaitļi b_n ir iegūti pie katra pirmās virknes skaitļa pieskaitot 23, bet tas nozīmē, ka ir divi virknes a_n locekļi, kas atšķiras tieši par 23, kaas nozīmē, ka ir secīgas dienas, kurās izspēlētas tieši 23 spēles.

5. Teodors ar saviem draugiem aizgāja pusdienās kādā interesantā vietā, kur visi sēž pie apaļa galda, kas spēj rotēt. Katrs no viņiem pasūtīja ēdienu, kas atšķiras no pārējo izvēlēm. Pēc ēdiena atnešanas sanācis tā, ka neviens nesēž pretī savam ēdienam. Pierādi, ka var pagriezt galdu tā, lai vismaz diviem būtu pretī savs ēdiens!

Atrisinājums. Apzīmēsim pusdienojošo cilvēku skaitu ar n. Katram cilvēkam varam piekārtot skaitli, kas apraksta, cik sēdvietu attālumā pulksteņrādītāja virzienā atrodas viņa ēdiens. Uzreiz varam secināt, ka nevienam cilvēkam netiek piekārtots skaitlis 0, jo tas nozīmētu, ka viņš jau sēž pretī savam ēdienam. Tas pats secināms arī par skaitli n, jo galds ir apaļš un simetrijas dēļ tiktu veikts vesels aplis un viņš tāpat sēdētu pretī savam ēdienam. Tas nozīmē, ka katram cilvēkam tiek piekārtots kāds skaitlis no 1 līdz $n-1$. Tā kā kopā ir n cilvēku, bet skaitļus skaits ir $(n-1)$, tad pēc Dirihlē principa ir vismaz divi cilvēki, kam ir piekārtots viens un tas pats skaitlis x. Ja pagriežam galdu pulksteņrādītāja virzienā par x sēdvietām, tad iegūstam situāciju, kurā vismaz divi cilvēki sēž pretī savam ēdienam.