Latvijas 69. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi un atrisinājumi
9.-12. klase

9.1. Lineāra funkcija $y = (m^2 - 3m)x + 4m - 4$ krusto x asi punktā, kura abscisa ir 2. Atrodi m vērtības un noskaidro, vai atbilstošā funkcija ir augoša vai dilstoša!

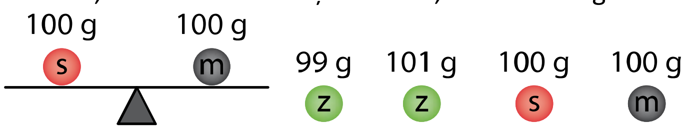
Atrisinājums. Dotā funkcija krusto x asi punktā $(2; 0)$, ievietojot šīs vērtības dotajā funkcijā, iegūstam vienādojumu $0 = (m^2 - 3m) \cdot 2 + 4m - 4$ jeb $m^2 - m - 2 = 0$, kura saknes ir $m_1 = -1$ un $m_2 = 2$. Tātad iespējami divi gadījumi:

- ja $m = -1$, tad dotā funkcija ir $y = 4x - 8$ un tā ir augoša, jo koeficients pie x ir pozitīvs;
- ja $m = 2$, tad dotā funkcija ir $y = -2x + 4$ un tā ir dilstoša, jo koeficients pie x ir negatīvs .

9.2. Dotas divas melnas, divas sarkanas un divas zaļas lodītes. Vienas lodītes masa ir 99 g, bet tādas pašas krāsas otras lodītes masa ir 101 g. Pārējās četras lodītes katra sver 100 g. Kā, lietojot sviras svarus bez atsvariem, ar divām svēršanām atrast vieglāko lodīti?

1. atrisinājums. Pirmajā svēršanā salīdzinām vienas sarkanās un vienas melnās lodītes masu.

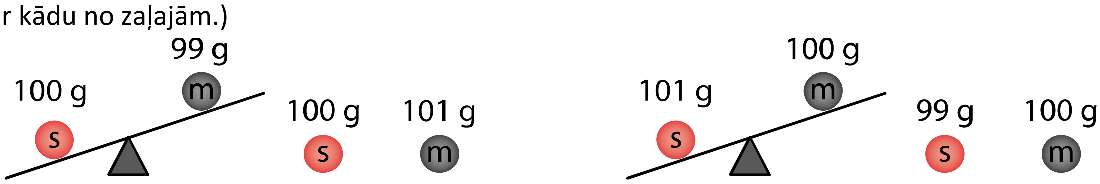
1) Ja svari ir līdzsvarā (skat. 1. att.), tad melnās un sarkanās lodītes katra sver 100 g, tātad vieglākā lodīte ir zaļā krāsā. Otrajā svēršanā, salīdzinot abas zaļās lodītes, atrodam vieglāko.



1. att.

2) Apskatām gadījumu, kad svari nav līdzsvarā. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka sarkanā lodīte ir smagāka nekā melnā. Tad iespējami divi gadījumi (skat. 2. att.):
   - sarkanā lodīte sver 100 g un melnā – 99 g;
   - sarkanā lodīte sver 101 g un melnā – 100 g.

   Tātad vieglākā lodīte ir vai nu tā, kas atrodas uz vieglākā svaru kausa, vai otra no sarkanajām. Otrajā svēršanā salīdzinot šīs abas lodītes (to, kas atrodas uz vieglākā svaru kausa un nesvērto sarkano lodīti), atrodam vieglāko. (*Piezīme*. Otrajā svēršanā var salīdzināt arī to lodīti, kas atrodas uz vieglākā svaru kausa ar kādu no zaļajām.)



2. att.

2. atrisinājums. Pirmajā svēršanā katrā kausā liekam no katras krāsas pa vienai lodītei (katrā svaru kausā ir 3 lodītes). Svari noteikti nebūs līdzsvarā, jo viens no kausiem saturēs vieglo lodīti, bet otrs saturēs smago lodīti. Tagad atliek tikai uzzināt, kura no lodītēm vieglajā kausā ir tā, kas sver 99 g. Otrajā svēršanā salīdzinām jebkuras divas lodītes no viegla kausa:

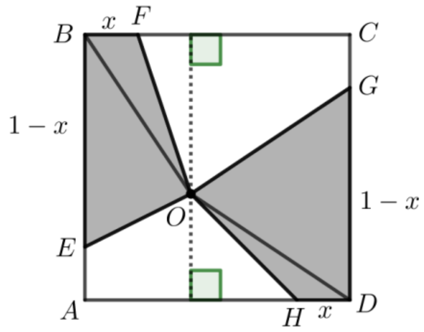
- ja svari ir līdzsvarā, tad abas lodītes sver 100 g un tā, kura netika svērta, ir meklētā lodīte, kas sver 99 g;
- ja svari nav līdzsvarā, tad vieglākais kauss ir tas, kurš satur meklēto lodīti.

3. atrisinājums. Pirmajā svēršanā vienā kausā ieliekam abas zaļās lodītes un otrā ieliekam vienu melnu un vienu sarkanu lodīti. Jāapskata trīs gadījumi.

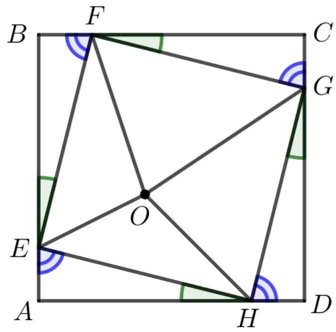
1) Ja svari ir līdzsvarā, tad tas nozīmē, ka zaļās lodītes ir tās, kuru masas nav 100 g. Otrajā svēršanā salīdzinām zaļās lodītes, lai atrastu vieglāko.
2) Ja kauss ar zaļajām lodītēm ir smagāks, tad lodīte, kuras masa ir 99 g atrodas vieglākajā kausā un ir vai nu sarkana, vai melna. Otrajā svēršanā salīdzinām abas melnās lodītes:
   - ja svari ir līdzsvarā, tad sarkanā lodīte, ko izmantojām pirmajā svēršanā, sver 99 g;
   - ja svari nav līdzsvarā, tad vieglākā melnā lodīte sver 99 g.
3) Ja kauss ar melno un sarkano lodīti ir smagāks, tad tajā atrodas lodīte, kas sver 101 g. Otrajā svēršanā salīdzinām abas melnās lodītes:
   - ja svari ir līdzsvarā, tad tā sarkanā lodīte, ko neizmantojām pirmajā svēršanā, sver 99 g;
   - ja svari nav līdzsvarā, tad vieglākajā kausā atrodas vieglākā melnā lodīte, kas sver 99 g.

9.3. Uz kvadrāta $ABCD$ malām AB, BC, CD un DA attiecīgi atzīmēti punkti E, F, G, H tā, ka $AE = BF = CG = DH$. Kvadrāta iekšpusē atlikts patvaļīgs punkts O. Pierādīt, ka $S_{AEOH} + S_{FCGO} = S_{BFOE} + S_{DHOG}$.

1. atrisinājums. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka kvadrāta malas garums ir 1. Apzīmējam $AE = BF = CG = DH = x$, tad $DG = BE = 1 - x$. Novelkam nogriežņus OB un OD (skat. 3. att.).



3. att.



4. att.

Ievērojam, ka no punkta O ir novilkti divi perpendikuli attiecīgi pret kvadrāta paralēlajām malām BC un AD, tātad šo perpendikulu (apzīmējam attiecīgi ar h_{BC} un h_{AD}) summa ir attālums starp paralēlajām malām, no kā secinām, ka $h_{BC} + h_{AD} = 1$. Izmantojot trijstūra laukuma aprēķināšanas formulu $S_\Delta = \frac{1}{2} a h_a$, iegūstam

$$S_{OBF} + S_{OHD} = \frac{1}{2} BF \cdot h_{BF} + \frac{1}{2} HD \cdot h_{HD} = \frac{1}{2} x \cdot (h_{BF} + h_{HD}) = \frac{1}{2} x \cdot 1 = \frac{1}{2} x$$

Līdzīgi aprēķinām, ka $S_{OBE} + S_{ODG} = \frac{1}{2}(1 - x)$.

Tātad

$$S_{BFOE} + S_{DHOG} = S_{OBF} + S_{OHD} + S_{OBE} + S_{ODG} = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2}(1 - x) = \frac{1}{2};$$

$$S_{AEOH} + S_{FCGO} = S_{ABCD} - (S_{BFOE} + S_{DHOG}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Līdz ar to esam pierādījuši, ka $S_{AEOH} + S_{FCGO} = S_{BFOE} + S_{DHOG}$.

2. atrisinājums. Novelkam nogriežņus EF, FG, GH un HE (skat. 4. att.). Trijstūri HAE, EBF, FCG un GDH ir vienādi pēc pazīmes $m\ell m$ un to laukumi arī ir vienādi, tātad pietiek pierādīt, ka $S_{EOF} + S_{GOH} = S_{FOG} + S_{HOE}$.

Tā kā trijstūri HAE, EBF, FCG un GDH ir vienādi taisnleņķa trijstūri, tad $EF = FG = GH = HE = a$ un divu trijstūra šauro leņķu summa ir 90°, tas ir, viens no tiem ir α, bet otrs ir $(90° - \alpha)$. Tāpēc

$$\sphericalangle HEF = \sphericalangle EFG = \sphericalangle FGH = \sphericalangle GHE = 180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°$$

Līdz ar to četrstūris $EFGH$ ir kvadrāts.

Izmantojot trijstūra laukuma aprēķināšanas formulu $S_\Delta = \frac{1}{2} a h_a$, iegūstam

$$S_{EOF} + S_{GOH} = \frac{1}{2} EF \cdot h_{EF} + \frac{1}{2} GH \cdot h_{GH} = \frac{1}{2} a (h_{EF} + h_{GH}) = \frac{1}{2} a^2$$

Līdzīgi iegūstam, ka $S_{FOG} + S_{HOE} = \frac{1}{2} a^2$. Tātad esam pierādījuši, ka $S_{EOF} + S_{GOH} = S_{FOG} + S_{HOE}$, un līdz ar to arī $S_{AEOH} + S_{FCGO} = S_{BFOE} + S_{DHOG}$.

9.4. Kvadrāts sastāv no $n \times n$ rūtiņām. Rindas sanumurētas no lejas uz augšu ar skaitļiem $1;\ 2;\ \dots;\ n$; tāpat sanumurētas kolonnas no kreisās uz labo pusi. Katrā rūtiņā ierakstīts vai nu $(+1)$, vai (-1). Ja rindas un kolonnas numuri ir vienādi, tad visu šajā rindā ierakstīto skaitļu reizinājums atšķiras no visu šajā kolonnā ierakstīto skaitļu reizinājuma. Vai tas ir iespējams, ja **a)** $n = 7$, **b)** $n = 8$?

Atrisinājums. a) Nē, nav iespējams. Ievērojam, ka rindā vai kolonnā visu ierakstīto skaitļu reizinājums var būt tikai $(+1)$ vai (-1). Apzīmēsim rindās ierakstīto skaitļu reizinājumus attiecīgi ar $r_1, r_2, \dots, r_7$ un kolonnās ierakstīto skaitļu reizinājumus attiecīgi ar $k_1, k_2, \dots, k_7$. No dotā secinām, ka i-tajā rindā un i-tajā kolonnā ierakstīto skaitļu reizinājumi ir attiecīgi $(+1)$ un (-1), vai otrādi. Līdz ar to $r_1 \cdot k_1 = r_2 \cdot k_2 = \dots = r_7 \cdot k_7 = -1$, tātad

$$(r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_7) \cdot (k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_7) = (r_1 \cdot k_1)(r_2 \cdot k_2) \dots (r_7 \cdot k_7) = -1$$

Taču šis reizinājums ir visu tabulā ierakstīto skaitļu reizinājuma kvadrāts – pretruna, jo skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs. Tātad kvadrātā 7×7 nav iespējams ierakstīt skaitļus atbilstoši uzdevuma nosacījumiem.

b) Jā, ir iespējams, noteikumiem atbilstošu skaitļu izvietojumu skat., piemēram, 5. att., kur tukšajās rūtiņās ierakstīts $(+1)$.

8.	-1							
7.								
6.			-1					
5.								
4.					-1			
3.								
2.							-1	
1.								
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.

5. att.

9.5. Kāds mazākais ciparu skaits jāpieraksta ciparu virknes 3456 beigās, lai iegūtu skaitli, kas dalās ar 2019?

1. atrisinājums. Mazākais ciparu skaits, kas jāpieraksta ciparu virknes beigās, ir trīs. Piemēram, skaitlis 3456528 dalās ar 2019 ($3456528 = 2019 \cdot 1712$).

Pierādīsim, ka mazāk kā trīs ciparus nevar pierakstīt dotās ciparu virknes beigās, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi.

Skaitlis 3456 nedalās ar 2019, tāpēc dotās virknes beigās ir jāpieraksta vismaz viens cipars.

Ievērojam, ka $17 \cdot 2019 = 34323 < \overline{3456x}$ un $18 \cdot 2019 = 36342 > \overline{3456x}$, kur x – cipars. Līdz ar to ar viena cipara pievienošanu nevar izveidot skaitli, kas dalās ar 2019.

Līdzīgi $171 \cdot 2019 = 345249 < \overline{3456xy}$ un $172 \cdot 2019 = 347268 > \overline{3456xy}$, kur x un y – cipari. Līdz ar to ar divu ciparu pievienošanu nevar izveidot skaitli, kas dalās ar 2019.

Tātad esam pierādījuši, ka jāpievieno vismaz trīs cipari.

2. atrisinājums. Mazākais ciparu skaits, kas jāpieraksta ciparu virknes beigās, ir trīs. Piemēram, skaitlis 3456528 dalās ar 2019 ($3456528 = 2019 \cdot 1712$).

Pierādīsim, ka mazāk kā trīs ciparus nevar pierakstīt dotās ciparu virknes beigās, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi.

Skaitlis 3456 nedalās ar 2019, tāpēc dotās virknes beigās ir jāpieraksta vismaz viens cipars.

Ievērojam, ka $\overline{3456x} = 34560 + x = 17 \cdot 2019 + 237 + x$, kur x – cipars. Tā kā $17 \cdot 2019$ dalās ar 2019, tad, lai $\overline{3456x}$ dalītos ar 2019, arī $(237 + x)$ jādalās ar 2019, bet tas nav iespējams, jo x ir cipars. Līdz ar to ar viena cipara pievienošanu nevar izveidot skaitli, kas dalās ar 2019.

Līdzīgi apskatām skaitli $\overline{3456xy} = 345600 + \overline{xy} = 171 \cdot 2019 + 351 + \overline{xy}$, kur x un y – cipari. Tā kā $171 \cdot 2019$ dalās ar 2019, tad, lai $\overline{3456xy}$ dalītos ar 2019, arī $(351 + \overline{xy})$ jādalās ar 2019, bet tas nav iespējams, jo $\overline{xy}$ ir divciparu skaitlis. Līdz ar to ar divu ciparu pievienošanu nevar izveidot skaitli, kas dalās ar 2019.

Piezīme. Atrast meklēto skaitli palīdz līdzīgi spriedumi, tas ir, $3456000 = 1711 \cdot 2019 + 1491$ un $1491 + 528 = 2019$.

10.1. Kvadrātfunkcija $y = x^2 + (m^2 + 3m)x + m - 1$ krusto x asi punktā, kura abscisa ir 1. Kāda var būt m vērtība? Atrast otru parabolas krustpunktu ar x asi!

Atrisinājums. Dotā funkcija krusto x asi punktā $(1; 0)$, līdz ar to, ievietojot šīs vērtības dotajā funkcijā, iegūstam vienādojumu $0 = 1 + m^2 + 3m + m - 1$ jeb $m^2 + 4m = 0$, kura saknes ir $m_1 = 0$ un $m_2 = -4$. Tātad iespējami divi gadījumi:

- ja $m = 0$, tad dotā funkcija ir $y = x^2 - 1$ un tās otrs krustpunkts ar x asi ir $(-1; 0)$;
- ja $m = -4$, tad dotā funkcija ir $y = x^2 + 4x - 5$ un tās otrs krustpunkts ar x asi ir $(-5; 0)$.

10.2. Dotas 6 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Trim no tām masa katrai ir 50 g, bet pārējām trim – katrai 51 g. Kā, lietojot sviras svarus bez atsvariem, ar divām svēršanām atrast vienu monētu, kuras masa ir 51 g?

1. atrisinājums. Pirmajā svēršanā uz katra svaru kausa uzliekam pa 3 monētām. Iespējami divi gadījumi:
(A) uz viena svaru kausa ir trīs smagākās (masa 51 g) monētas, bet uz otra – trīs vieglākās (masa 50 g) monētas;
(B) uz viena svaru kausa ir divas smagākās un viena vieglākā monēta, bet uz otra – viena smagākā un divas vieglākās monētas (skat. 6. att.).
Abos gadījumos viens svaru kauss nosveras uz leju. Ņemam tās trīs monētas, kas atrodas uz tā svaru kausa, kas nosvērās uz leju. Uzliekam divas no šīm trīs monētām pa vienai uz katra svaru kausa.

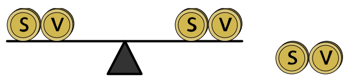
- Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad uz abiem svaru kausiem uzliktas smagākās monētas – prasītais izpildīts, esam atraduši pat divas monētas, kuru masa ir 51 g.
- Ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad smagākā monēta atrodas uz tā svaru kausa, kas nosveras uz leju – prasītais izpildīts, esam atraduši monētu, kuras masa ir 51 g.

Tātad, izmantojot divas svēršanas ir atrasta vismaz viena monēta, kuras masa ir 51 g, un prasītais ir izpildīts.

6. att.

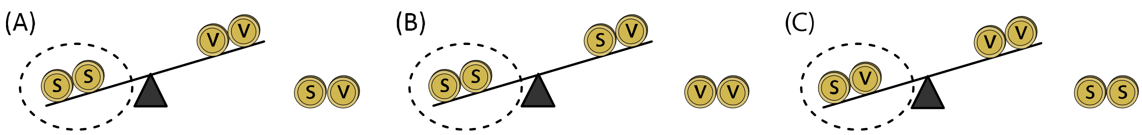
2. atrisinājums. Pirmajā svēršanā uz katra svaru kausa uzliekam pa 2 monētām.

- Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad uz katra svaru kausa uzlikts pa vienai smagajai (51 g) monētai (skat. 7. att.). Otrajā svēršanā izvēlamies divas monētas, kas atrodas uz viena svaru kausa un salīdzinām savā starpā, lai atrastu smagāko monētu.



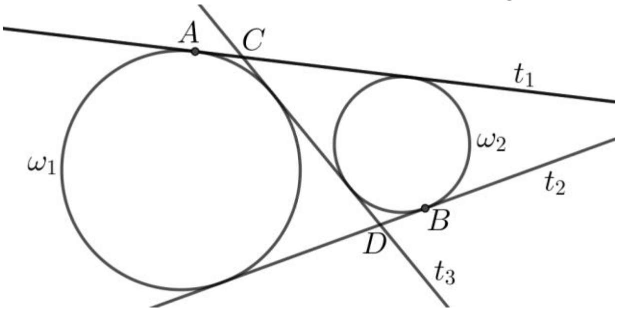
7. att.

- Ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad iespējami trīs gadījumi (skat. 8. att.):
(A) uz smagākā svaru kausa uzliktas divas smagās monētas, bet uz otra kausa – divas vieglās;
(B) uz smagākā svaru kausa uzliktas divas smagās monētas, bet uz otra kausa viena smagā un viena vieglā;
(C) uz smagākā svaru kausa uzlikta viena smagā monēta un viena vieglā, bet uz otra svaru kausa – divas vieglās monētas.
Otrajā svēršanā izvēlamies divas monētas, kas atrodas uz smagākā svaru kausa, un salīdzinām savā starpā (no tām vismaz viena ir monēta, kuras masa ir 51 g):
  - ja svari ir līdzsvarā, tad esam atraduši divas monētas, kuru masa ir 51 g;
  - ja svari nav līdzsvarā, tad smagākā (51 g) monēta ir tā, kas atrodas uz svaru kausa, kas nosveras uz leju.



8. att.

10.3. Plaknē dotas divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2, kurām nav kopīgu punktu un kuru rādiusi nav vienāda garuma. Novilktas trīs pieskares t_1, t_2 un t_3, kas katra pieskaras abām riņķa līnijām – abas riņķa līnijas atrodas vienā un tajā pašā t_1 pusē, vienā un tajā pašā t_2 pusē, bet katra savā t_3 pusē (skat. 9. att.). Taisne t_1 pieskaras ω_1 punktā A un krusto t_3 punktā C, taisne t_2 pieskaras ω_2 punktā B un krusto t_3 punktā D. Pierādīt, ka $AC = BD$.

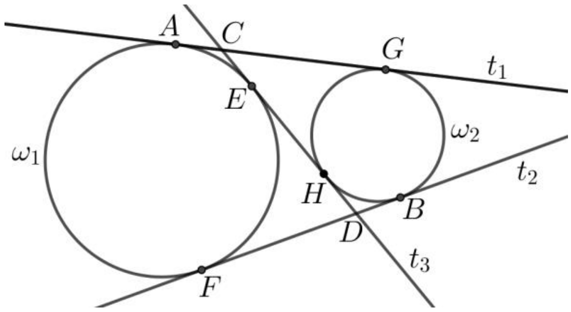


9. att.

Atrisinājums. Ar E, F, G un H apzīmējam pārējos pieskaršanās punktus (skat. 10. att.). Tā kā pieskaru, kas vilktas no viena punkta, nogriežņi ir vienādi, tad iegūstam vienādības: $AC = CE$, $CH = CG$, $DH = DB$, $DE = DF$. Tātad

- $FB = FD + DB = DE + DB = (EH + HD) + DB = EH + 2DB$ jeb $BD = \frac{1}{2}(FB - EH)$,
- $AG = AC + CG = AC + CH = AC + (CE + EH) = 2AC + EH$ jeb $AC = \frac{1}{2}(AG - EH)$.

Ar X apzīmējam pieskaru t_1 un t_2 krustpunktu, tad $XG = XB$ un $XA = XF$. Līdz ar to $AG = FB$, no kā izriet, ka $AC = BD$.



10. att.

10.4. Doti 2019 reāli skaitļi ar īpašību, ka jebkuru 1010 skaitļu summa ir lielāka nekā atlikušo 1009 skaitļu summa. Pierādīt, ka visi dotie skaitļi ir pozitīvi!

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka kāds no dotajiem skaitļiem x ir negatīvs vai 0, tas ir $x \leq 0$. Atlikušos 2018 skaitļus sadalām divās grupās A un B katrā pa 1009 skaitļiem. Grupas A un B skaitļu summu attiecīgi apzīmējam ar S_A un S_B. Pēc dotā vienlaicīgi ir spēkā divas nevienādības $S_A + x > S_B$ un $S_B + x > S_A$. Saskaitot šīs nevienādības, iegūstam

$$S_A + S_B + 2x > S_A + S_B$$

Līdz ar to $2x > 0$ jeb $x > 0$. Esam ieguvuši pretrunu ar pieņēmumu, ka $x \leq 0$. Tātad visi dotie skaitļi ir pozitīvi.

10.5. Atrast visus pirmskaitļu pārus (m, n), kuriem $20m + 18n = 2018$.

Atrisinājums. Dalām abas dotā vienādojuma puses ar 2 un pārveidojam iegūto vienādojumu:

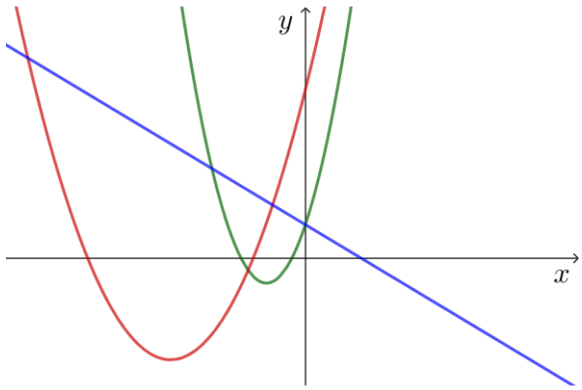
$$10m + 9n = 1009$$
$$1000 - 10m = 9n - 9$$
$$10(100 - m) = 9(n - 1)$$

Ievērojam, ka iegūtās vienādības labās puses izteiksme ir pozitīva, tātad arī $(100 - m)$ jābūt pozitīvam. Tā kā 10 un 9 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad $(100 - m)$ ir jādalās ar 9. Iespējamās m vērtības varētu būt 1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82 un 91, no kurām derīgas ir tikai 19, 37 un 73, jo tie ir pirmskaitļi. Atrodam atbilstošās n vērtības:

- ja $m = 19$, tad $10 \cdot 81 = 9(n - 1)$ jeb $n = 91$ (neder, jo nav pirmskaitlis),
- ja $m = 37$, tad $10 \cdot 63 = 9(n - 1)$ jeb $n = 71$ (pirmskaitlis),
- ja $m = 73$, tad $10 \cdot 27 = 9(n - 1)$ jeb $n = 31$ (pirmskaitlis).

Tātad dotajam vienādojumam ir divi atrisinājumi: $m = 37$, $n = 71$ un $m = 73$, $n = 31$.

11.1. Vai var gadīties, ka 11. att. ir doti funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = cx^2 + bx + a$ un $y = bx + c$ grafiki? (Funkciju grafiki nav zīmēti mērogā.)



11. att.

Atrisinājums. Nē, nevar.

Funkcijas $y = bx + c$ grafiks ir taisne. Ievērojam, ka tā ir dilstoša funkcija un taisne krusto y asi punktā, kura ordinātas vērtība ir pozitīva, tad $b < 0$.

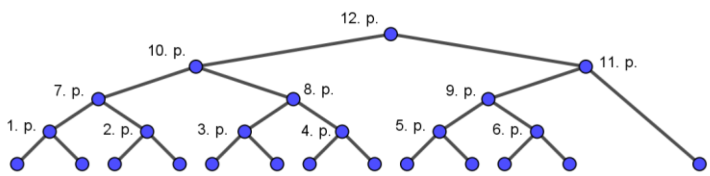
Apskatām funkciju $y = ax^2 + bx + c$. Tā kā doto parabolu zari ir vērsti uz augšu un krustpunktu ar y asi ordinātas vērtība ir pozitīva, tad $a > 0$. Aprēķinām šīs parabolas virsotnes abscisas vērtību $x_v = -\frac{b}{2a}$. Tā kā virsotne atrodas trešajā kvadrantā, tad $x_v < 0$ un, ņemot vērā, ka $a > 0$, secinām, ka $b > 0$. Esam ieguvuši pretrunu ar to, ka $b < 0$ (lineārā funkcija dilstoša), tātad 11. att. nevar būt doti funkciju $y = ax^2 + bx + c$, $y = cx^2 + bx + a$ un $y = bx + c$ grafiki.

11.2. Šaha klubā ir 13 šahisti. Visu viņu spēles prasme ir atšķirīga un partijā vienmēr uzvar spēcīgākais. **a)** Kā, izspēlējot 12 partijas, noskaidrot pašu labāko šahistu šajā klubā? **b)** Kā, izspēlējot 15 partijas, noskaidrot gan pašu labāko, gan otru labāko šahistu šajā klubā?

Atrisinājums. a) Izvēlamies divus šahistus un noskaidrojam labāko. Pirmās partijas uzvarētājs spēlē ar kādu vēl nespēlējušu šahistu. Šīs partijas uzvarētājs spēlē ar nākamo vēl nespēlējušo šahistu. Tā turpina – katras partijas labākais spēlētājs sacenšas tālāk, kamēr katrs šahists ir izspēlējis vismaz vienu partiju. Pēdējās partijas uzvarētājs ir labākais šajā klubā. Tā kā ir 12 zaudētāji, tad kopā tika izspēlētas 12 partijas.

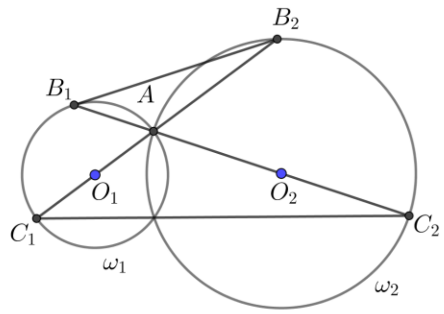
b) Sākumā izveidojam 6 šahistu pārus (skat. 12. att.) un katrā pārī noskaidrojam labāko šahistu (6 partijas). Tad šos sešus labākos šahistus sadalām trīs pāros un katrā no šiem pāriem noskaidrojam labāko šahistu (3 partijas). Pirmos divus no atrastajiem trīs labākajiem šahistiem salīdzinām savā starpā un noskaidrojam labāko (1 partija), bet trešo no tiem salīdzinām ar to šahistu, kas līdz šim nav piedalījies nevienā šaha partijā un noskaidrojam labāko (1 partija). Visbeidzot labākie šahisti no pēdējām divām šaha partijām sacenšas savā starpā (1 partija). Tātad, izspēlējot $6 + 3 + 1 + 1 + 1 = 12$ šaha partijas, ir noskaidrots pats labākais šahists šajā klubā. Iepriekš parādījām, kā, izspēlējot 12 partijas, var noskaidrot uzvarētāju šajā klubā. Otrs labākais šahists meklējams tikai un vienīgi no tiem 4 šahistiem, kas spēlējuši ar uzvarētāju un tam zaudējuši. Labākais no šiem četriem šahistiem atrodams, izspēlējot vēl 3 partijas, piemēram, salīdzinām divus šahistus (1 partija), labākais no tiem spēlē ar nākamo (1 partija), labākais šahists šajā partijā spēlē ar nākamo šahistu (1 partija). Tas nozīmē, ka ar $12 + 3 = 15$ šaha partijām var atrast pašu labāko un otro labāko šahistu.

Piezīme. b) gadījumā aprakstītais plāns reizē ir atrisinājums gan a), gan b) gadījumam. Rīkojoties pēc a) gadījumā aprakstītā plāna, nav iespējams, izspēlējot 15 partijas, atrast arī otru labāko šahistu.

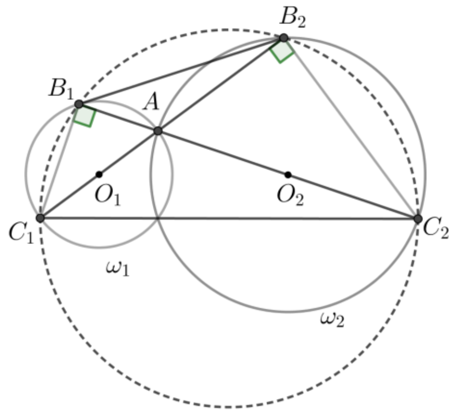


12. att.

11.3. Divas riņķa līnijas ω_1 (ar centru punktā O_1) un ω_2 (ar centru punktā O_2) krustojas punktā A. Taisne O_1A krusto ω_2 punktā B_2, bet ω_1 – punktā C_1. Taisne O_2A krusto ω_1 punktā B_1, bet ω_2 – punktā C_2 (skat. 13. att.). Pierādīt, ka $\sphericalangle B_2B_1A = \sphericalangle C_2C_1A$.



13. att.



14. att.

1. atrisinājums. Tā kā $\sphericalangle C_1B_1A = \sphericalangle C_2B_2A = 90°$ (kā ievilktie leņķi, kas balstās uz diametra) un $\sphericalangle B_1AC_1 = \sphericalangle B_2AC_2$ (kā krustleņķi), tad trijstūri $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta AB_2C_2$ pēc pazīmes $\ell\ell$ un $\frac{AB_1}{AB_2} = \frac{AC_1}{AC_2}$. Tā kā $\frac{AB_1}{AB_2} = \frac{AC_1}{AC_2}$ un $\sphericalangle B_1AB_2 = \sphericalangle C_1AC_2$ kā krustleņķi, tad $\Delta B_1AB_2 \sim \Delta C_1AC_2$ pēc pazīmes $m\ell m$. Tātad $\sphericalangle B_2B_1A = \sphericalangle C_2C_1A$ kā atbilstošie leņķi līdzīgos trijstūros.

2. atrisinājums. Tā kā $\sphericalangle C_1B_1A = \sphericalangle C_2B_2A = 90°$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz diametra, tad ap četrstūri $B_1B_2C_2C_1$ var apvilkt riņķa līniju (skat. 14. att.). Līdz ar to $\sphericalangle B_2B_1C_2 = \sphericalangle C_2C_1B_2$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka B_2C_2. Tātad $\sphericalangle B_2B_1A = \sphericalangle C_2C_1A$.

11.4. Pierādīt, ka nevienādība $\frac{a}{b}(a+1)^2 + \frac{b}{a}(b+1)^2 \geq 2(a+1)(b+1)$ ir spēkā visiem reāliem pozitīviem skaitļiem a un b.

1. atrisinājums. Tā kā a un b ir pozitīvi skaitļi, tad abas nevienādības puses drīkst reizināt ar ab. Iegūstam pierādāmajai nevienādībai ekvivalentu nevienādību

$$a^2(a+1)^2 + b^2(b+1)^2 \geq 2a(a+1)b(b+1)$$
$$a^2(a+1)^2 - 2a(a+1)b(b+1) + b^2(b+1)^2 \geq 0$$

Ekvivalenti pārveidojam šīs nevienādības kreisās puses izteiksmi:

$$\big(a(a+1)\big)^2 - 2a(a+1)b(b+1) + \big(b(b+1)\big)^2 \geq 0$$
$$\big(a(a+1) - b(b+1)\big)^2 \geq 0$$

Reāla skaitļa kvadrāts ir vienmēr ir nenegatīvs. Līdz ar to iegūta patiesa nevienādība un arī dotā nevienādība ir patiesa, jo tika veikti tikai ekvivalenti pārveidojumi.

2. atrisinājums. Dotā nevienādība ir ekvivalenta nevienādībai

$$\frac{a}{b}(a+1)^2 + \frac{b}{a}(b+1)^2 - 2(a+1)(b+1) \geq 0$$

Ievērojot, ka a un b ir pozitīvi skaitļi, ekvivalenti pārveidojam šīs nevienādības kreisās puses izteiksmi:

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 (a+1)^2 + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 (b+1)^2 - 2(a+1)(b+1) \geq 0$$

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}(a+1)\right)^2 - 2\sqrt{\frac{a}{b}}(a+1)\sqrt{\frac{b}{a}}(b+1) + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}(b+1)\right)^2 \geq 0$$

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}(a+1) - \sqrt{\frac{b}{a}}(b+1)\right)^2 \geq 0$$

Reāla skaitļa kvadrāts ir vienmēr ir nenegatīvs. Līdz ar to iegūta patiesa nevienādība un arī dotā nevienādība ir patiesa, jo tika veikti tikai ekvivalenti pārveidojumi.

3. atrisinājums. Tā kā a un b ir pozitīvi skaitļi, tad dotās nevienādības kreisās puses izteiksmi var novērtēt, izmantojot nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko:

$$\frac{a}{b}(a+1)^2 + \frac{b}{a}(b+1)^2 \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{b}(a+1)^2 \cdot \frac{b}{a}(b+1)^2} = 2(a+1)(b+1),$$

kas arī bija jāpierāda.

11.5. Atrast visus pirmskaitļu pārus (m, n), kuriem $20m + 19n = 2019$.

1. atrisinājums. Pārveidojam doto vienādojumu

$$2000 - 20m = 19n - 19$$
$$20(100 - m) = 19(n - 1)$$

Ievērojam, ka iegūtās vienādības labās puses izteiksme ir pozitīva, tātad arī $(100 - m)$ jābūt pozitīvam. Tā kā 20 un 19 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad $(100 - m)$ ir jādalās ar 19. Iespējamās m vērtības varētu būt 5, 24, 43, 62 un 81, no kurām derīgas ir tikai 5 un 43, jo tie ir pirmskaitļi. Atrodam atbilstošās n vērtības:

- ja $m = 5$, tad $20 \cdot 95 = 19(n - 1)$ jeb $n = 101$ (pirmskaitlis),
- ja $m = 43$, tad $20 \cdot 57 = 19(n - 1)$ jeb $n = 61$ (pirmskaitlis).

Tātad dotajam vienādojumam ir divi atrisinājumi: $m = 5, n = 101$ un $m = 43, n = 61$.

2. atrisinājums. Apskatīsim doto vienādojumu pēc moduļa 19. Tā kā $20m \equiv 1 \cdot m \equiv m \pmod{19}$, $19n \equiv 0 \pmod{19}$ un $2019 \equiv 5 \pmod{19}$, tad, lai būtu vienādība, jāizpildās nosacījumam $m \equiv 5 \pmod{19}$. Ievērojot, ka $20 \cdot 101 = 2020 > 2019$, secinām, ka $m < 101$. Tātad derīgās m vērtības ir pirmskaitļi, kas mazāki nekā 101, un, dalot ar 19, dod atlikumu 5. Šādas vērtības ir tikai divas $m = 5$ un $m = 43$. Atrodam atbilstošās n vērtības:

- ja $m = 5$, tad $20 \cdot 95 = 19(n - 1)$ jeb $n = 101$ (pirmskaitlis),
- ja $m = 43$, tad $20 \cdot 57 = 19(n - 1)$ jeb $n = 61$ (pirmskaitlis).

Tātad dotajam vienādojumam ir divi atrisinājumi: $m = 5, n = 101$ un $m = 43, n = 61$.

12.1. Urnā atrodas 66 baltas un nezināms skaits melnu lodīšu. Ja uz labu laimi tiek izvilktas divas lodītes, tad varbūtība, ka abas lodītes būs vienā krāsā, sakrīt ar varbūtību, ka lodītes būs dažādās krāsās. Cik melno lodīšu atrodas urnā?

Atrisinājums. Tā kā varbūtība, ka abas lodītes būs vienā krāsā, sakrīt ar varbūtību, ka lodītes būs dažādās krāsās, tad abas varbūtības ir $\frac{1}{2}$. Varbūtību, ka abas lodītes būs vienā krāsā, aprēķināsim izmantojot formulu $P(A) = \frac{k}{n}$, kur k ir labvēlīgo notikumu skaits un n ir visu notikumu kopskaits.

Ar m apzīmējam melno lodīšu skaitu. Tad labvēlīgo notikumu (abas lodītes ir vienā krāsā) skaits ir $66 \cdot 65 + m(m - 1)$ un visu notikumu kopskaits (izņemtas divas lodītes) ir $(66 + m)(65 + m)$. Līdz ar to varbūtība, ka abas izvilktās lodītes ir vienādā krāsā, ir $\frac{m(m-1)+66\cdot 65}{(66+m)(65+m)}$.

Lai iegūtu melno lodīšu skaitu, jāatrisina vienādojums

$$\frac{m(m-1) + 66 \cdot 65}{(66 + m)(65 + m)} = \frac{1}{2}$$

Reizinām abas vienādojuma puses ar $2(66 + m)(65 + m) > 0$, iegūstam

$$2m^2 - 2m + 2 \cdot 66 \cdot 65 = 66 \cdot 65 + 131m + m^2$$
$$m^2 - 133m + 66 \cdot 65 = 0$$

Šī vienādojuma saknes ir $m_1 = 78$ un $m_2 = 55$. Tātad urnā atrodas 78 vai 55 melnas lodītes.

Piezīme. Varbūtību, ka abas izņemtās lodītes ir vienā krāsā, var arī aprēķināt, izmantojot notikumu summas varbūtību, tas ir, ja notikumi A un B ir nesavienojami, tad $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, kur A – abas izņemtās lodītes ir baltas un B – abas izņemtās lodītes ir melnas. Aprēķinām varbūtību $P(A)$. Ar m apzīmējam melno lodīšu skaitu. Varbūtība, ka pirmā izvilktā lodīte ir balta, ir $\frac{66}{66+m}$ un varbūtība, ka otrā izvilktā lodīte arī ir balta (ja pirmā bija balta), ir $\frac{66-1}{66+m-1}$. Tātad varbūtība, ka abas izvilktās lodītes ir baltas, ir $P(A) = \frac{66\cdot 65}{(66+m)(65+m)}$. Līdzīgi iegūstam, ka varbūtība, ka abas izvilktās lodītes ir melnas, ir $P(B) = \frac{m(m-1)}{(66+m)(65+m)}$. Līdz ar to varbūtība, ka abas izvilktās lodītes ir vienādā krāsā, ir $\frac{m(m-1)}{(66+m)(65+m)} + \frac{66\cdot 65}{(66+m)(65+m)}$.

12.2. Brigita ir iedomājusies naturālu skaitli, kas nepārsniedz 60. Indra drīkst Brigitai uzdot jautājumus, uz kuriem atbilde ir "jā" vai "nē". Kā, uzdodot sešus jautājumus, Indra noteikti var uzzināt Brigitas iedomāto skaitli?

1. atrisinājums. Indra domās sadala skaitļus divos vienāda apjoma intervālos: [1; 30] un [31; 60]. Pirmais jautājums: "Vai iedomātais skaitlis pieder intervālam [1; 30]?"

- Ja atbilde uz pirmo jautājumu ir "jā", tad nākamais jautājums jāuzdod par divreiz mazāku intervālu nekā tas, par kuru jau zināms, ka tajā atrodas iedomātais skaitlis, tas ir, "Vai iedomātais skaitlis pieder intervālam [1; 15]?"
- Ja atbilde uz pirmo jautājumu ir "nē", tad iedomātais skaitlis atrodas intervālā [31; 60] un nākamais jautājums būtu jāuzdod par divreiz mazāku intervālu [31; 45].

Līdzīgi Indrai jārīkojas arī turpmākajos jautājumos, tas ir, atkarībā no atbildes vienmēr jāaplūko tas intervāls, kas satur iedomāto skaitli, un šis intervāls jāsadala divos pēc apjoma vienādos intervālos (katrā no abiem intervāliem ir vai nu n skaitļi, vai arī vienā ir n, bet otrā $n+1$ skaitlis). (Skat., piemēram, 15. att., kurā parādīts, kāda apjoma intervālos notiek dalīšana.)

Šādi rīkojoties, ar sešiem jautājumiem Indra noteikti var uzzināt Brigitas iedomāto skaitli.

Piezīme. Atrisinājums balstīts uz "skaldi un valdi" algoritmu.

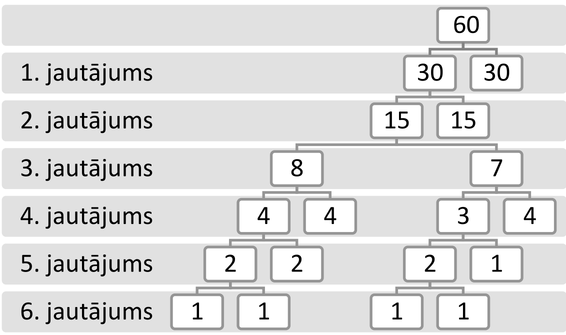
2. atrisinājums. Tā kā Brigitas iedomātais skaitlis nepārsniedz 60, tad to binārajā skaitīšanas sistēmā var uzrakstīt izmantojot ne vairāk kā 6 ciparus. Indrai jāuzdod jautājums par katru skaitļa ciparu:

1. jautājums – Vai skaitļa pirmais cipars binārajā skaitīšanas sistēmā ir 1?
2. jautājums – Vai skaitļa otrais cipars binārajā skaitīšanas sistēmā ir 1?

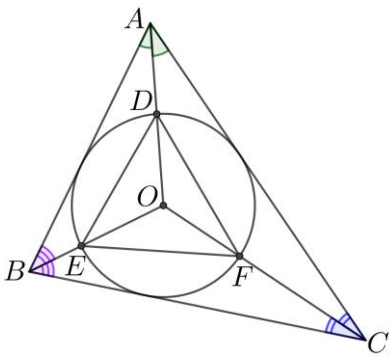
...

6. jautājums – Vai skaitļa sestais cipars binārajā skaitīšanas sistēmā ir 1?

Tā kā skaitļa binārajā pierakstā tiek izmantoti tikai cipari 0 un 1, tad šādi rīkojoties, ar sešiem jautājumiem Indra noteikti var uzzināt Brigitas iedomāto skaitli.



15. att.



16. att.

12.3. Trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas centrs ir O. Nogriežņi OA, OB, OC krusto šo riņķa līniju attiecīgi punktos D, E, F. Zināms, ka $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$. Pierādīt, ka trijstūris ABC ir regulārs!

1. atrisinājums. Punkts O ir trijstūra ABC bisektrišu krustpunkts (skat. 16. att.). Apzīmējam $\sphericalangle BAC=2\alpha$, $\sphericalangle ABC=2\beta$ un $\sphericalangle ACB=2\gamma$. Tad $\sphericalangle DOF=180°-\alpha-\gamma$ un $\sphericalangle ODF=\sphericalangle DFO=\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$, jo ΔODF ir vienādsānu. Līdzīgi iegūstam, ka $\sphericalangle EDO=\sphericalangle DEO=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ un $\sphericalangle OEF=\sphericalangle OFE=\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$.

Tātad ΔDEF iekšējo leņķu lielumi ir $\sphericalangle EDF=\alpha+\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$, $\sphericalangle DEF=\beta+\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$, $\sphericalangle EFD=\gamma+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Izmantojot, ka $\alpha+\beta+\gamma=90°$, iegūstam $\sphericalangle EDF=\frac{\alpha}{2}+45°$, $\sphericalangle DEF=\frac{\beta}{2}+45°$ un $\sphericalangle EFD=\frac{\gamma}{2}+45°$. Tā kā $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$, tad $\Delta ABC\sim\Delta DEF$ pēc pazīmes mmm un atbilstošie trijstūru leņķi ir vienādi, tas ir, $2\alpha=\frac{\alpha}{2}+45°$, $2\beta=\frac{\beta}{2}+45°$ un $2\gamma=\frac{\gamma}{2}+45°$. Tātad $\alpha=\beta=\gamma=30°$ jeb $2\alpha=2\beta=2\gamma=60°$ un ΔABC ir regulārs.

2. atrisinājums. Punkts O ir trijstūrim DEF apvilktās riņķa līnijas centrs – vidusperpendikulu krustpunkts. Tā kā $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$, tad trijstūri ABC un DEF ir homotētiski ar homotētijas centru O. Tātad trijstūrī DEF ievilktās riņķa līnijas centrs arī ir O. Tā kā trijstūra DEF bisektrišu krustpunkts sakrīt ar vidusperpendikulu krustpunktu, tad tas ir regulārs trijstūris. Līdz ar to arī trijstūris ABC ir regulārs.

12.4. Pierādīt, ka pozitīviem skaitļiem a, b, c izpildās nevienādība $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right| \leq |b-c|$.

1. atrisinājums. Ja $b=c$, tad dotā nevienādība ir patiesa.

Ja $b>c$, tad jāpierāda, ka $\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2} \leq\ b-c$. Reizinot abas nevienādības puses ar saistīto izteiksmi $\left(\sqrt{a^2+b^2}\ +\sqrt{a^2+c^2}\right)$, iegūstam $b^2\ -\ c^2 \leq (b-c)\left(\sqrt{a^2+b^2}\ +\sqrt{a^2+c^2}\right)$.

Tālāk, dalot abas nevienādības puses ar $(b-c)$, kas ir pozitīvs skaitlis, iegūstam

$$b+c \leq \sqrt{a^2+b^2}\ +\sqrt{a^2+c^2},$$

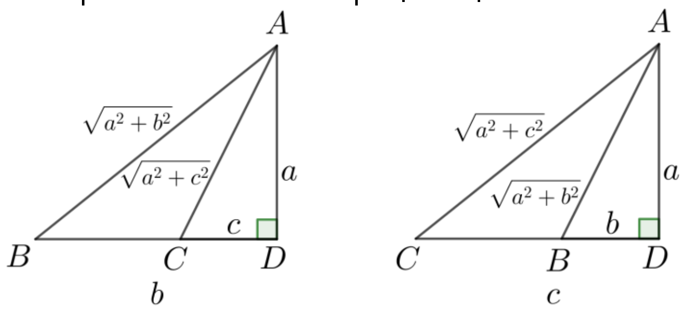
kas ir patiesa nevienādība, jo $b \leq \sqrt{a^2+b^2}$ un $c \leq \sqrt{a^2+c^2}$.

Ja $b<c$, tad jāpierāda, ka $\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2} \leq c-b$, ko var izdarīt analogi kā iepriekšējā gadījumā.

2. atrisinājums. Ja $b=c$, tad dotā nevienādība ir patiesa.

Apskatām gadījumu, kad $b \neq c$. Novelkam nogriezni AD, kura garums ir a. Tam perpendikulāri no punkta D uz vienu pusi atliekam nogriežņus BD un CD, kuru garumi attiecīgi ir b un c (iespējami divi gadījumi, skat. 17. att.). No Pitagora teorēmas trijstūros ADB un ADC iegūstam, ka $AC=\sqrt{a^2+c^2}$ un $AB=\sqrt{a^2+b^2}$. Ievērojam, ka $BC=|BD-CD|=|b-c|$. No trijstūra nevienādības trijstūrī ABC iegūstam $BC>|AB-AC|$ jeb $|b-c|>\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|$.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right| \leq |b-c|$.



17. att.

12.5. Pierādīt, ka vienādojumam $(a-b)^2=a+b$ ir bezgalīgi daudz atrisinājumu naturālos skaitļos!

Atrisinājums. Pamatosim, ka der vērtības formā $a=\frac{k(k+1)}{2}$ un $b=\frac{k(k-1)}{2}$, kur k ir naturāls skaitlis, kas lielāks nekā 1:

- a un b ir naturāli skaitļi, jo $k(k+1)$ un $k(k-1)$ dalās ar 2 kā divu pēc kārtas esošu naturālu skaitļu reizinājums;
- ievietojot šīs vērtības dotajā vienādojumā, iegūstam patiesu vienādību:

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}-\frac{k(k-1)}{2}\right)^2=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}$$

$$\left(\frac{2k}{2}\right)^2=\frac{2k^2}{2} \quad \Rightarrow \quad k^2=k^2$$

Tā kā šādu k vērtību ir bezgalīgi daudz, tad arī dotajam vienādojumam ir bezgalīgi daudz atrisinājumu:

Piezīme. Meklētās a un b vērtības var palīdzēt atrast tālāk aprakstītie spriedumi.

1. veids. Apzīmējam $a-b=k$, tad $k^2=a+b$. Saskaitot abas vienādības, iegūstam $2a=k+k^2$ jeb $a=\frac{k(k+1)}{2}$. Aprēķinām $b=a-k=\frac{k^2+k}{2}-k=\frac{k^2-k}{2}=\frac{k(k-1)}{2}$

2. veids. Apzīmējam $a-b=k$, tad $a+b=k+2b$, tātad doto vienādojumu var pārrakstīt formā $k^2=k+2b$, no kā iegūstam, ka $b=\frac{k^2-k}{2}=\frac{k(k-1)}{2}$ un $a=k+b$.