Punktiņš. (A grupa) Matemātiskās spēles

16.11.2018

Nodarbības mērķis: veicināt skolēnu sadarbību. Pāru spēles laikā skolēniem ir jācenšas atklāt spēles iznākuma likumsakarības. Skolēniem jāmēģina analizēt spēles gaitu, jāmeklē uzvarošā stratēģija.

Uzvarošā stratēģija divu spēlētāju spēlē ir tam spēlētājam, kurš, pareizi izvēloties gājienus, jebkurā gadījumā uzvarēs pretinieku.

Piezīme: jaunāko klašu skolēniem minētie nodarbības mērķi ir pietiekami sarežģīti. Ieteicams sagatavot skaitļu kartītes pirmā uzdevuma izspēlēšanai, kā arī nelielus 3 veidu priekšmetus (vai krāsainas kartītes), lai varētu uzskatāmi analizēt trešo uzdevumu. Nodarbības laikā ir nepieciešams dialogs ar skolēniem; pasniedzējam ir jāizvirza uzvedinošie jautājumi, kā arī jāizskaidro uzvarētāja stratēģija, pamatojoties uz spēles nosacījumiem.

1. Ir 10 kartiņas. Uz katras no tām uzrakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 10 (uz katras kartiņas cits skaitlis). Andris un Bruno pēc kārtas ņem kartiņas, Andris ņem vienu, bet Bruno ņem vienu vai 2 kartiņas; pirmais ņem Andris. Andris grib, lai tad, kad visas kartiņas būs paņemtas, uz viņa kartiņām uzrakstīto skaitļu summa būtu pāra skaitlis. Vai viņš to noteikti var panākt, pat ja Bruno centīsies viņam traucēt?

Atrisinājums. Te otrais spēlētājs var noteikt spēles gaitu - trijos gājienos viņš var izvēlēties kopumā 6 kartiņas, uz kurām ir 2 pārskaitļi un 4 nepāra skaitļi vai 4 pāra un 2 nepāra skaitļi. Kāpēc otrajam spēlētājam tas izdodas? Pirmajos divos gājienos otrajam spēlētājam nav problēmu izvēlēties divus vienāda veida kartiņu pārus. Pēc pirmā spēlētāja trešā gājiena uz galda būs palikušas 3 kartiņas, kur vismaz divas no tām būs ar vienādu paritāti, tāpēc otrais spēlētājs atkal var paņemt vienādas paritātes kartiņas.

Visu uz kartiņām uzrakstīto skaitļu summa ir 55, kas ir nepāra skaitlis. Otrais spēlētājs būs savācis summā pāra skaitli, tad pirmajam spēlētājam uz četrām kartiņām būs atlikuši skaitļi, kuru summa ir nepāra skaitlis un pirmais spēlētājs ir zaudējis.

2. Marta un Anna spēlē skaitļu spēli. Marta nosauc skaitli 1 vai 2, vai 3, vai 4. Tad Anna pieskaita šim skaitlim arī vienu skaitli no 1 līdz 4, tad Marta izvēlas skaitli no 1 līdz 4, tad Anna un tā turpina. Spēle beidzas, kad viena no meitenēm nosauc skaitli 20 un ir uzvarējusi. Kura no meitenēm var uzvarēt pareizi spēlējot?

Piezīme. Šo spēli var izspēlēt pie tāfeles un ar skolēniem apspriest – kāda būtu laba gājienu izvēle. Aplūkojot pilnu spēles pierakstu, var redzēt, ka apskats jāsāk no beigām.

Atrisinājums. Aplūkosim spēles priekšpēdējo skaitli. Iedomāsimies, ka Anna nosaukusi skaitli 19, tad Marta var pieskaitīt 1 un ir uzvarējusi. Ja Anna nosauc 18, Marta var pieskaitīt 2. Tāpat Marta uzvarēs, ja Anna nosauks 17 vai 16. Ja Annai ir izdevies nosaukt 15, tad Marta nevar iegūt skaitli 20, jo lielākais, ko viņa var pieskaitīt, ir 4 un rezultāts būs 19. Tāpēc Annai ir jāpadomā, kā viņa varētu iegūt skaitli 15. Tādu var iegūt, ja Marta nosaukusi 11 vai 12, vai 13, vai 14. Tā notiks, ja Anna pirms tam izvēlēsies 10.

Marta, uzsākot spēli, var izvēlēties jebkuru skaitli no 1 līdz 4. Anna nosauc 5. Marta var izvēlēties skaitli no 6 līdz 9. Anna nosauc 10, un tā turpina. Tātad, pareizi spēlējot, otrā spēlētāja var uzvarēt, izvēloties skaitļus 5, 10 un 15. Pēdējo gājienu var izdarīt Anna, nosaucot skaitli 20, un uzvarēt.

3. Uz galda ir a āboli, b bumbieri un c cepumi. Divi spēlētāji pēc kārtas ņem tieši divus dažādus gardumus. Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu. Kurš uzvarēs, pareizi spēlējot, ja

   a) $a = 1, b = 3, c = 3$

   b) $a = 1, b = 2, c = 3$

   c) $a = 2, b = 2, c = 2$

   d) $a = 2, b = 3, c = 4$

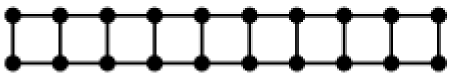
Atrisinājums. a) Uzvar pirmais spēlētājs, ja iesākumā izvēlas vienīgo ābolu un bumbieri vai cepumu. Tad atlikuši 2 gājieni, kur vienīgā iespēja ir paņemt bumbieri un cepumu, vienu pāri ņem otrais spēlētājs un pēdējo pāri ņem pirmais spēlētājs.

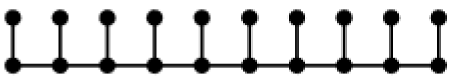
b) Atkal uzvar pirmais spēlētājs, ja sākumā izvēlas ābolu un cepumu. Uz galda paliek 2 bumbieri un 2 cepumi, tātad iespējami 2 gājieni.

c) Šajā spēlē uzvarēs otrais spēlētājs. Lai kādus 2 saldumus arī izvēlētos pirmais spēlētājs, uz galda izveidosies līdzīga situācijā kā b) gadījumā. Otrais spēlētājs izvēlēsies iepriekš aprakstīto stratēģiju.

d) Pirmajam spēlētājam nav izdevīgi ņemt ābolu, jo tad izveidosies gadījums a) vai līdzīgs gadījums gadījumam b), un otrais spēlētājs uzvarēs. Tāpēc pirmais spēlētājs ņems bumbieri un cepumu. Paliks 2 āboli, 2 bumbieri un 3 cepumi. Ja otrais spēlētājs paņems 1 ābolu un 1 bumbieri, to pašu darīs arī pirmais spēlētājs un uzvarēs (jo būs palikuši vienīgi 3 cepumi, bet katrā gājienā jāizvēlas 2 dažādas lietas). Tāpēc otrais spēlētājs ņems ābolu un cepumu (vai bumbieri un cepumu) un uzvarēs, jo būs palikuši tikai 2 gājieni. Pēc pirmā spēlētāja izvēles atliks vai nu 1 bumbieris un 2 cepumi, vai arī visi saldumi pa vienam, kur iespējams pēdējais gājiens otrajam spēlētājam.

4. [1]Iekarotāji ieņem pilsētas. Divi spēlētāji pēc kārtas izvēlas pilsētu ("iekaro" to), ja tā nav savienota ar ceļu ar pretinieka iekaroto pilsētu. Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu. Kuram no spēlētājiem ir uzvarošā stratēģija? Ir dotas 2 kartes

   a) 

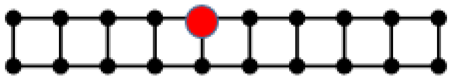
   b) 

Atrisinājums.

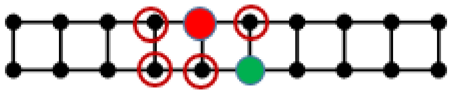
[1] Vairāki uzdevumi adaptēti no M.Lomonosova turnīra: http://turlom.olimpiada.ru/old

a) Uzvar otrais spēlētājs. Viņš izvēlas pilsētas simetriski attiecībā pret centru, pēc tam, kad pirmais spēlētājs ir izdarījis savu izvēli. Ja pirmajam spēlētājam ir iespējams gājiens, tad tāds ir iespējams arī otrajam spēlētājam, jo pilsētu skaits ir pāra skaitlis (visas pilsētas var iedalīt simetrijas pāros attiecībā pret centru).

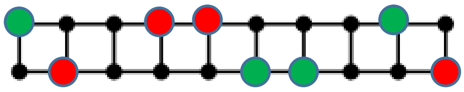
Piemēram, ja pirmais spēlētājs ieņem vienu no centrālajām pilsētām:



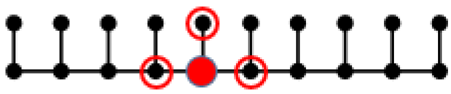
Pretinieks nevar ieņemt nevienu kaimiņu pilsētu, bet viņš ieņem simetriski novietoto pilsētu. (Shēmā ar sarkanajiem aplīšiem ir norādīts, kādas pilsētas otrais spēlētājs nevar izvēlēties. Saskaņā ar uzvarošo stratēģiju, otrais spēlētājs izvēlējies pilsētu, kas atzīmēta ar zaļu punktu):



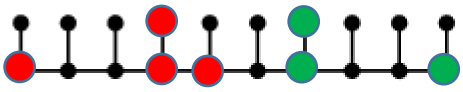
Spēles piemērs pēc vairākiem gājieniem:



b) gadījumā uzvarēt var pirmais spēlētājs. Pirmo viņš izvēlas vienu no vidējām pilsētām, tad otram spēlētājam atliek vēl 16 neaizņemtas vietas:



Nākamajos gājienos pirmais spēlētājs simetriski attiecībā pret shēmas viduslīniju atkārto otrā spēlētāja gājienus. Spēles sākuma piemērs:



Ja otrajam spēlētājam ir gājiens, tad pirmajam spēlētājam arī tāds ir. Vieta blakus pirmajai aizņemtajai pilsētai ir kā papildus bonusa iespēja.

Piezīme. Lai saprastu, kā attīstās spēles gaita, ir ieteicams iesākumā izpētīt mazākus piemērus – pilsētas, kartes, kuras ir 4 vai 8 pilsētas.

1. Viesnīcā ir 10 numuri, kur katrs no tiem ir sešvietīgs. Katrā numurā dzīvo pa vienam viesim. Divi spēlētāji pēc kārtas pārvieto visus vienas istabas viesus uz citu numuru tā,

lai atbrīvotu istabas, kur veikt remontu. Vairāk kā 6 cilvēki vienā numurā nedrīkst būt. Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu. Kurš no spēlētājiem var uzvarēt pareizi spēlējot?

Atrisinājums. Katrā gājienā tiek atbrīvots viens numurs. Aplūkosim situāciju, kad visi viesi ir izmitināti pēdējos divos numuros. Viesu skaits ir 10, tāpēc tos nevar izvietot mazāk kā divos sešvietīgajos numuros. Ja visi viesi ir izvietoti 3 numuros, tad vismaz vienā no numuriem ir vismaz 4 viesi. Pārējie viesi ir ne vairāk ka 6 un kaut kādā veidā izvietoti divos numuros. Tāpēc situācijā, kad aizņemti 3 numuri, gājiens ir iespējams. Līdz ar to secinām, ka iespējami 8 gājieni – pāra skaits – tāpēc uzvarētājs būs otrais spēlētājs.