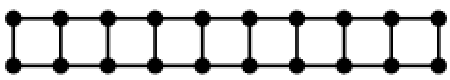
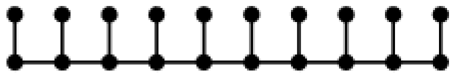
Punktiņš. (B grupa) Matemātiskās spēles. *Īsi atrisinājumi un komentāri*

16.11.2018

1. Marta un Anna spēlē skaitļu spēli. Marta nosauc skaitli 1 vai 2, vai 3, vai 4. Tad Anna pieskaita šim skaitlim arī vienu skaitli no 1 līdz 4, tad Marta izvēlas skaitli no 1 līdz 4, tad Anna un tā turpina. Spēle beidzas, kad viena no meitenēm nosauc skaitli 40. Kura no meitenēm var uzvarēt pareizi spēlējot?

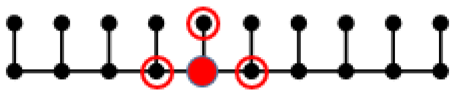
Atrisinājums. Uzdevumu risina "no otra gala", aplūkojot spēles beigu situāciju. Ja nosauktais skaitlis ir viens no skaitļiem 36, 37, 38 vai 39, tad tā meitene, kurai ir gājiens, ir uzvarētāja. Kurš skaitlis bija nosaukts, lai no minētajiem skaitļiem (no 36 – 39) nevarētu izvairīties? Acīmredzot, tas ir skaitlis 35. Līdzīgi spriežot, atrodam, ka "slikto" skaitļu virkne ir 35, 30, 25, …., visi tie skaitļi, kuri ir skaitļa 5 daudzkārtņi. Pirmā meitene Marta nevar nosaukt skaitli 5, tātad uzvarošā stratēģija ir Annai. Viņa secīgi var nosaukt skaitļus 5, 10, 15, … un 40.

2. Iekarotāji ieņem pilsētas. Divi spēlētāji pēc kārtas izvēlas pilsētu ("iekaro" to), ja tā nav savienota ar ceļu ar pretinieka iekaroto pilsētu. Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu. Kuram no spēlētājiem ir uzvarošā stratēģija? Ir dotas 2 kartes

a)  b) 

Komentārs. Pirmajā a) gadījumā var uzvarēt otrais spēlētājs, izvēloties pilsētas simetriski attiecībā pret kartes centru, kad pirmais spēlētājs savu izvēli ir izdarījis. Ja pirmajam spēlētājam ir gājiens, tad arī otrajam tāds ir. Gadījumā b) uzvarēt var pirmais spēlētājs, ja iesākumā izvēlas vienu no apakšējām vidējām pilsētām. Spēles gaitā pirmais spēlētājs ievēro tādu pašu spēles stratēģiju, kā aprakstīts a) gadījumā.

Attēlā parādīts, kā jāuzsāk spēli b) gadījumā. Sarkanie aplīši norāda, ka tās pilsētas otrais spēlētājs nevar izvēlēties.



3. Uz galda ir a āboli, b bumbieri un c cepumi. Divi spēlētāji pēc kārtas ņem tieši divus dažādus gardumus. Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu. Kurš uzvarēs, pareizi spēlējot, ja

a) $a = 1, b = 2, c = 3$; b) $a = 1, b = 4, c = 4$; c) $a = 2, b = 4, c = 6$; d) $a = 7, b = 9, c = 15$

Atrisinājums.

a) Pirmais spēlētājs ņem ābolu un cepumu. Tad otram spēlētājam jāņem bumbieris un cepums, tad vēl viens pāris bumbieris un cepums paliek pirmajam spēlētājam – viņš uzvarējis.

b) Apskatīsim vispārīgu gadījumu, kad 3 kaudzītēs ir priekšmeti 1 un 2n un 2n. Šajā gadījumā uzvarēs otrais spēlētājs, neatkarīgi no pirmā spēlētāja izvēles. Ja pirmais spēlētājs ņem vienīgo priekšmetu 1 un vienu no priekšmetiem 2n, tad atliek divas kaudzītes, kurās ir 2n un 2n-1 priekšmets. Līdz ar to ir nepāra skaits gājienu, tāpēc pēdējo gājienu izdarīs otrais spēlētājs. Ja pirmais spēlētājs pēc pirmā gājiena atstāj 3 kaudzītes, tad otrais spēlētājs atstāj 2n-2 un 2n-1 priekšmetu. Te ir pāra skaits gājienu (2n – 2), tāpēc atkal uzvar otrais spēlētājs. (Līdzīgi spriežot, ja 3 kaudzītēs ir 1 un 2n+1, un 2n+1 priekšmeti, tad uzvarēs pirmais spēlētājs.)

4. Viesnīcā ir 10 numuri, kur katrs no tiem ir sešvietīgs. Katrā numurā dzīvo pa vienam viesim. Divi spēlētāji pēc kārtas pārvieto visus vienas istabas viesus uz citu numuru tā, lai atbrīvotu istabas, kur veikt remontu. Vairāk kā 6 cilvēki vienā numurā nedrīkst būt. Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu. Kurš no spēlētājiem var uzvarēt pareizi spēlējot? Kas notiks, ja ir 15 trīsvietīgi numuri? Ja ir 18 četrvietīgi numuri?

Atrisinājums. Vispirms aplūkosim gadījumu, kad atlikuši 3 numuri, kuros jau izvietoti visi 10 viesi. Tad divos no šiem numuriem būs ne vairāk kā 6 cilvēki, kurus tad var izvietot vienā kopējā numurā, tā izveidojot divus numurus, kuros dzīvo kopumā 10 cilvēki, viņus vienā sešvietīgā numurā ietilpināt nevar. Tā kā katrā gājienā atbrīvojas viens numurs, tad gājienu skaits ir pāra skaitlis un te uzvar otrais spēlētājs.

Ja ir 15 viesi, tad viņus var izvietot 5 trīsvietīgos numuros. Vienā gājienā tiek atbrīvots 1 numurs, tad var atbrīvot 10 numurus, tas ir jāizdara pāra skaits gājienu. Uzvarēs otrais spēlētājs.

Ja ir 18 viesi, tad viņus visus nevar izvietot četros četrvietīgos numuros, jo tur ietilps tikai 16. Šo viesu izmitināšanai nepieciešami vismaz 5 numuri. Atbrīvot var 13 numurus, tā šajā partijā uzvarēs pirmais spēlētājs.