Punktiņš. (B grupa) Savienojumu veidošana

18.01.2019

Īsi risinājumi un komentāri; iepazīšanās ar grafu teorijas elementiem, kurus var formulēt nodarbības sākumā: grafs, virsotne, šķautne, virsotnes pakāpe.

1. (ievaduzdevums) Apgabalā ir 25 ciemati, no katra ciemata uz citiem apgabala ciematiem iziet 4 ceļi. Par katra ceļa uzturēšanu katrs ciemats pašvaldībai maksā 300 eiro gadā. a) Cik naudas pašvaldība saņem kopumā? b) Iedzīvotāju trūkuma dēļ 5 ceļus slēdza. Cik tagad pašvaldība saņem?

Atrisinājums. Ja katrs ciemats maksā 300 eiro par katra ceļa uzturēšanu, tad pašvaldība saņem $25 \cdot 4 \cdot 300 = 30000$ eiro gadā. Ievērojot, ka par katru ceļu pašvaldība saņem 600 eiro, tad pēc ceļu slēgšanas tā saņem par 3000 eiro mazāk. Tas ir, pašvaldība saņem 27000 eiro gadā.

2. Reiz dzīvoja karalis, kuram bija 3 dēli, arī turpmāk karaļa dinastijā dzima tikai dēli. Cik daudz pēcnācēju kopumā karalim bija, ja 100 viņa pēcnācējiem katram bija 3 dēli, bet visiem pārējiem bērnu nebija?

Atrisinājums. Kopumā bija 101 cilvēks, ieskaitot karali, kuriem bija dēli. Tāpēc karaļa kopējais pēcnācēju skaits ir $101 \cdot 3 = 303$.
Piezīme. Ir ieteicams uzzīmēt arī kādu karaļa dzimtas koku un pārrunāt dinastijas veidošanās iespējas.

3. Kādā jautrā pasākumā ieradās liels draugu pulks. Katrs zēns te draudzējās tieši ar trim meitenēm, bet katra meitene draudzējās tieši ar pieciem zēniem. Cik bērnu bija šajā pulkā, ja viņu skaits bija vismaz 30, bet ne vairāk kā 40?

Atrisinājums. Draudzība ir divpusēja attiecība. Iedomāsimies, ka meitenes var nostādīt vienā rindā, bet zēnus – otrā, atzīmēsim to kā punktiņu (*virsotņu*) sistēmu. Pretējo rindu punktiņus var savienot ar nogriezni (*šķautni*), ja zēns un meitene draudzējas. Kad visas draudzības ir atzīmētas, var saskaitīt kopējo katram punktiņam pievienoto nogriežņu skaitu vienā rindā (*rindas virsotņu pakāpju summu*). Tas sakrīt ar atbilstošo pievienoto nogriežņu skaitu otrā rindā. Tāpēc visu meiteņu *m* kopējais draudzību skaits sakrīt ar visu zēnu *z* kopējo draudzību skaitu, jeb $3m = 5z$. Ievērojot uzdevuma nosacījumus, ir jāatrisina sistēma:

$$\begin{cases} 3m = 5z \\ 30 \le m + z \le 40 \end{cases}$$

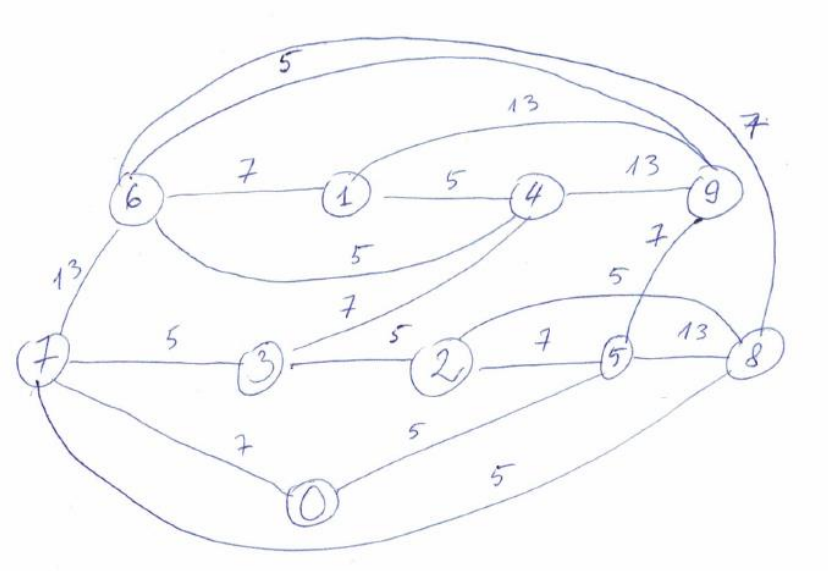
Ievērosim, ka meiteņu skaits *m* dalās ar 5. Meitenēm ir jābūt vismaz 20, lai izpildītu nosacījumus. Iespējamas ir 2 atbildes – 20 meitenes un 12 zēni, kopā 32 bērni. Vai 25 meitenes un 15 zēni, kopā 40 bērni.
Piezīme. Iekavās slīpā rakstā norādīti atbilstošie grafu teorijas jēdzieni.

4. Bibliotēkā satikās 9 sirmi bibliotekāri un gribēja savā starpā sarokoties. Bet diviem bibliotekāriem bija pilnas rokas ar grāmatām, tāpēc viņi tikai pamāja ar galvu. Visi pārējie sarokojās vienādu skaitu reižu. Ar cik draugiem katrs bibliotekārs sarokojās?

Atrisinājums. Ja diviem bibliotekāriem bija aizņemtas rokas, tad sarokoties varēja tikai septiņi. Ir iespējams, ka kolēģi katrs ir sarokojušies tieši ar diviem kolēģiem, vai ar 4, vai katrs ar katru (ar sešiem). Nepāra sarokošanās skaits nav iespējams. Ja saskaita katra bibliotekāra izdarīto rokas spiedienu skaitu un tie visi katram ir vienādi ar *n*, tad kopējais katra bibliotekāra izdarīto rokas spiedienu skaits ir $7 \cdot n$. Ievērojot, ka vienā sveicienā piedalās 2 dalībnieki, tad katra šāda sarokošanās ir ieskaitīta 2 reizes. Tāpēc skaitlim *n* ir jābūt pāra skaitlim.

5. Vai var rindā izrakstīt visus veselos skaitļus no 0 līdz 9 tā, lai katru divu blakus stāvošo skaitļu summa dalītos ar 5, 7 vai 13?

Atrisinājums. Var shematiski attēlot, kurus skaitļus rindā rakstīt blakus. Piemēram, šādi:



Te viegli ir ieraudzīt "ceļu", kā atbilstošos skaitļus izrakstīt rindā. Piemēram,

0; 7; 3; 2; 5; 8; 6; 1; 4; 9 .

6. (*)[1] Kādā kalnu apgabalā ir 100 rūķu ciemi starp kuriem ir ceļi. Tomēr pa šiem ceļiem no Čuņčiņu ciema uz Čāpiņu ciemu nevar tikt. Kāds lielākais ceļu skaits te ir iespējams?

Atrisinājums. Vislielākais ceļu skaits būtu tādā gadījumā, ja katrs ciems būtu savienots ar katru citu ciemu. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka, pieņemsim, Čāpiņu ciems atrodas no citiem ciemiem savrup, vai varbūt ir vairāki tādi ciemi, vai varbūt ir divas atsevišķas ciemu grupas. Pieņemsim, ka ir 2 grupas, kura katrā grupā ir izveidoti visi iespējamie ceļi. Apzīmēsim vienas grupas ciemu skaitu ar *n*, tad otras grupas ciemu skaits ir *100 – n*.
Vienas grupas visu iespējamo ceļu skaits ir

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

Abu grupu kopējais lielākais iespējamais ceļu skaits ir

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(100-n)(100-n-1)}{2}$$

[1] Grūts uzdevums, domāts tiem skolēniem, kuri pārzina algebriskas metodes

Mūs interesē, kādā gadījumā šis skaitlis būs lielākais iespējamais. Novērtēsim izteiksmi:

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(100-n)(100-n-1)}{2}=$$

$$=\frac{n^2-n}{2}+\frac{9900-199n+n^2}{2}=$$

$$=\frac{2n^2-200n+9900}{2}=$$
$$=n^2-100n+4950=(n-50)^2+2450$$

Aplūkojot iznākumu, secinām, ka izteiksmes vismazākā vērtība ir, kad $n = 50$. Izteiksmes vērtība būs vislielākā, ja ciemu skaits n būs vislielākais iespējamais, tas ir 99 ciemi, bet Čāpiņu ciemam nepienāk neviens ceļš. Lielākais iespējamais ceļu skaits te ir 4851. Ja ciemi veido vairāk kā divas savstarpēji nesavienotas grupas, tad iespējamais lielākais ceļu skaits būs mazāks.