"Profesora Cipariņa klubs"

4. nodarbība

Apskatot ekstremālā elementa principu, redzējām, cik svarīgi ir ieviest kārtību no visa sākotnējā haosa datos. Ekstremālā elementa princips nav vienīgais šāds paņēmiens – vēl ļoti svarīga ir **invariantu** metode.

Invariants – tas, kas paliek nemainīgs (kādā norisē, kādos apstākļos).

Invariantu metode bieži ir lietojama tādu uzdevumu risināšanā, kuros tiek aplūkots kāds process – noteiktu darbību izpilde ar dotajiem lielumiem, un ir jāpierāda, ka no sākotnējiem datiem norādīto rezultātu **NAV** iespējams iegūt. Tad uzdevuma risinājumā var rīkoties pēc tālāk aprakstītā plāna.

Invariantu metode
Atrast piemērotu īpašību, kura
1) piemīt sākumā dotajiem lielumiem;
2) ir invarianta, tas ir, saglabājas, veicot pieļaujamās darbības;
3) nepiemīt tam lielumam, kas būtu jāiegūst galarezultātā.

Invariants atkarībā no uzdevuma var būt, piemēram, elementu skaits, summa, starpība, reizinājums, paritāte (būt pāra vai nepāra skaitlim), dalāmība ar 3, dalāmība ar 4, periodiskums.

Visvienkāršākais invariants ir **paritāte**.

Piemērs. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 1; 2; 3; ...; 10. Vienā gājienā var izvēlēties jebkurus divus no tiem un abiem pieskaitīt pa vieniniekam. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi?

Atrisinājums. Sākumā doto skaitļu summa ir nepāra skaitlis:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$$

Katrā gājienā, pieskaitot pa vieniniekam diviem skaitļiem, visu skaitļu summa palielinās par 2 (par pāra skaitli). Pie nepāra skaitļa pieskaitot pāra skaitli, iegūst nepāra skaitli. Tātad visu skaitļu summa pēc katra gājiena paliek nepāra skaitlis.
Beigās prasīts iegūt desmit vienādus skaitļus, bet desmit vienādu skaitļu summa $10x$ ir pāra skaitlis.
Tātad nevar panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi. Uzdevums atrisināts.
Šajā uzdevumā invariants: visu skaitļu summa vienmēr ir nepāra skaitlis.

Ir daži vienkārši pierādāmi fakti (pierādi tos pats!), kas visticamākais ir jau sen zināmi, bet tāpat noderīgi:

1. Veselu skaitļu summa ir nepāra skaitlis tad un tikai tad, ja summā ietilpstošo nepāra skaitļu skaits ir nepāra.
2. Veselu skaitļu reizinājums ir nepāra skaitlis tad un tikai tad, ja reizinājumā neietilpst neviens pāra skaitlis (jeb visi reizinātāji ir nepāra skaitļi).

Paritāte šķiet tik triviāla lieta, bet bieži vien ar šo pietiek, it īpaši, ja paritāte tiek pieminēta uzdevumu formulējumā.

Piemērs. Katram $a_1, a_2, \dots, a_n$ atbilst kāds no skaitļiem $1, 2, 3, \dots, n$, turklāt visi $a_1, a_2, \dots, a_n$ ir dažādi. Pamatot, ja n ir nepāra skaitlis, tad reizinājums

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \cdots (a_n - n)$$

ir pāra skaitlis.

Atrisinājums. Kas mums garantēs to, ka šis reizinājums ir pāra skaitlis? Pietiks ar to, ja pamatosim, ka kāds no reizinātājiem ir pāra. Bet kā to izdarīt? Pirmais, kas nāktu prātā, ir izmantot paņēmienu "pierādījums no pretējā", un apskatītos, kas notiktu, ja pieņemam, ka visi reizinātāji ir nepāra. Šis ir izdarāms, un es arī lasītāju aicinu šo izdarīt līdz galam kā papildu pārbaudi paņēmiena apguvei. Taču šoreiz parādīšu jums, kā šo uzdevumu atrisināt ar invariantu metodi.
Apskatām summu $(a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \cdots + (a_n - n)$ un veicam pārveidojumus:

$$\begin{aligned}(a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \cdots + (a_n - n) &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (1 + 2 + \cdots n) = \\ &= (1 + 2 + \cdots + n) - (1 + 2 + \cdots + n) = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Iegūstam, ka summa ir invarianta – tā ir vienāda ar 0 neatkarīgi no tā, kāda ir katra skaitļa a_i vērtība. Tā kā n ir nepāra skaitlis, tad summa $(a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \cdots + (a_n - n)$ var būt pāra skaitlis tikai tad, ja vismaz viens skaitlis summā ir pāra. Tā kā 0 ir pāra skaitlis, šī summa satur vismaz vienu pāra skaitli. Tātad vismaz viens no reizinātājiem reizinājumā $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \cdots (a_n - n)$ ir pāra skaitlis, no kā izriet, ka arī reizinājums ir pāra skaitlis. Prasītais pierādīts.

Paritāte nav vienīgais iespējamais invariants. Tagad apskatīsim citus invariantus.

Piemērs. Autoservisā „Šrotiņš" ir 39 mašīnas. Naskais Maigonis katra mēneša 30. datumā vai nu pārdod 7 restaurētas mašīnas un to vietā nopērk 16 vecas mašīnas, vai arī 19 mašīnas nodod metāllūžņos un to vietā nopērk 4 vecas mašīnas. Nekādas citas darbības, kas maina mašīnu skaitu, netiek veiktas. Vai iespējams, ka „Šrotiņā" kāda mēneša 31. datumā būs tieši 2020 mašīnas?

Atrisinājums. Ievērojam, ka sākumā mašīnu skaits ir 39, kas dalās ar 3.
Aplūkosim, kā izmainās kopējais mašīnu skaits, atkarībā no tā, kuru darbību Maigonis veic:

1) ja pārdod 7 restaurētas mašīnas un to vietā nopērk 16 vecas mašīnas, tad kopējais mašīnu skaits palielinās par 9 (par skaitli, kas dalās ar 3);
2) ja 19 mašīnas nodod metāllūžņos un to vietā nopērk 4 vecas mašīnas, tad kopējais mašīnu skaits samazinās par 15 (par skaitli, kas dalās ar 3).

Ja pie skaitļa, kas dalās ar 3, pieskaita vai no tā atņem skaitli, kas dalās ar 3, vienmēr iegūst skaitli, kas dalās ar 3, jo $3k \pm 3m = 3(k \pm m)$.
Tātad kopējais mašīnu skaits pēc katras darbības dalās ar 3.
Skaitļa 2020 ciparu summa ir $2 + 0 + 2 + 0 = 4$, kas nedalās ar 3, tātad arī pats skaitlis 2020 nedalās ar 3. Tātad nav iespējams, ka „Šrotiņā" kāda mēneša 31. datumā būs tieši 2020 mašīnas.

Piemērs. Dota tukša istaba, kurā katru minūti vai nu viens cilvēks ieiet istabā, vai arī divi cilvēki iziet no tās. Vai pēc 3^{199} minūtēm istabā var būt tieši $3^{20} + 2$ cilvēki?

Atrisinājums. Apskatām, kā var izmainīties cilvēku skaits istabā pēc katrām trim minūtēm.

- $1 + 1 + 1 = 3$ – palielinās par 3;
- $1 + 1 - 2 = 0$ – nemainās;
- $1 - 2 - 2 = -3$ – samazinās par 3;
- $-2 - 2 - 2 = -6$ – samazinās par 6.

Ievērojam, ka cilvēku skaits istabā izmainās par skaitli, kas dalās ar 3. Tā kā sākumā istaba bija tukša jeb tajā bija 0 cilvēku (skaitlis, kas dalās ar 3), tad ik pēc trīs minūtēm, tas ir, arī 3^{199} minūtē, cilvēku skaits telpā dalās ar 3. Tā kā $3^{20} + 2$ nedalās ar 3, tad prasītais nav iespējams.

Uzdevumi

1. Kasparam dārzā izaugušas 2019 mutantu nezāles. Gandrīz vienmēr lai cik viņš izrautu ārā, tikpat nezāles izaug atpakaļ. Bet kaut kas dīvains notiek, ja izrauj tieši 5, 14, 19, 33 vai 77 nezāles reizē. Šajos gadījumos atauga attiecīgi 21, 2, 7, 41 un 53 nezāles. Kaspars prātoja, vai ir iespējams iznīdēt visas nezāles. Vai viņam tas var izdoties?

2. Agnija un Raitis uz tāfeles uzrakstīja naturālos skaitļus no 1 līdz 100. Katrā solī Agnija un Raitis izvēlas katrs pa vienam skaitlim no tāfeles, attiecīgi a un b, un aizstāj tos ar skaitli $ab+a+b$. Skaidrs, ka pēc 99 soļiem uz tāfeles paliks viens skaitlis. Vai šis skaitlis ir atkarīgs no tā, kā Raitis un Agnija izvēlas skaitļus?

3. Rūķīšu ciemā tiek rīkots pikošanās dueļa turnīrs, kurā piedalīsies 2019 rūķīši. Pamatot, ka turnīra beigās rūķīšu skaits, kas izspēlēja nepāra skaita spēļu, būs pāra skaitlis!
Piezīme. Turnīra struktūrai nav nozīmes. Neviens cilvēks nevar aptvert, kā rūķīši rīko turnīrus. Pat ja tiek rīkots turnīrs, kur netiek izspēlēta neviena spēle. Šādā gadījumā rūķīšu skaits, kas izspēlē nepāra skaitu spēles, ir 0, kas ir pāra skaitlis, kā tas tiek pieprasīts uzdevumā.

4. Vienpadsmit draugi izlēma iet uzspēlēt basketbolu. Katrā komandā ir pieci spēlētāji, un viens paliek par tiesnesi. Lai komandu sadalījums būtu godīgs, tad komandas tiek sadalītas tā, lai katras komandas spēlētāju kopējā masa sakristu ar otras komandas kopējo masu. Izrādās, lai arī kuru izvēlas par tiesnesi, vienmēr var izveidot komandas, lai masas sakristu. Pamato, ka visi vienpadsmit draugi sver vienādi!

5. Naturālu skaitli katru minūti var vai nu reizināt, vai dalīt vai nu ar 2, vai 3 (darbības jāveic tā, lai rezultāts vienmēr būtu naturāls skaitlis). Vai tieši vienas stundas laikā no skaitļa 216 var iegūt 972?

Risinājumu iesūtīšanas termiņš: 1. marts.

Ja risinājumus sūti pa pastu, tad LU A. Liepas NMS ir jauna adrese:

Profesora Cipariņa klubs
LU A. Liepas NMS
Jelgavas iela 3, 531. telpa
Rīga
LV-1004