Punktiņš. (A Grupa) Ķer zaķi!

25.01.2019

Nodarbības mērķis: iepazīties ar Dirihlē teorēmu par "zaķiem un būriem" un tās pielietošanu. Mācīties veidot uzdevumu pamatojumu un pierādījumu konstrukcijas.

Dirihlē teorēma (vienkāršots variants): Ja divos būros jāizvieto 3 zaķi, tad vismaz vienā būrī būs vismaz 2 zaķi.

1. Ir septiņi zaķi un 3 būrīši. Cik variantos zaķus var izvietot būrīšos? Atrodi visas iespējas!

Atrisinājums. Šo uzdevumu uzdod pirms iepazīšanās ar Dirihlē teorēmu, lai skolēni varētu izpētīt izvietojumu īpašības. Šo uzdevumu arī var pārfrāzēt: cik dažādos veidos var iegūt skaitli 7 no ne vairāk kā 3 saskaitāmajiem?

$7 + 0 + 0 = 7$; $6 + 1 + 0 = 7$; $5 + 2 + 0 = 7$; $4 + 3 + 0 = 7$; $5 + 1 + 1 = 7$; $4 + 1 + 2 = 7$;

$3 + 1 + 3 = 7$; $3 + 2 + 2 = 7$

Apskatām visu summu lielākos skaitļus: 7; 6; 5; 4; 5; 4; 3; 3. Mazākais no šiem skaitļiem ir 3. Tātad – vismaz vienā būrī būs vismaz 3 (vai vairāk) zaķi.

2. Paskaidro, kāpēc no jebkuriem trīs naturāliem skaitļiem var izvēlēties divus tādus skaitļus, kuru summa ir pāra skaitlis!

Atrisinājums. Starp 3 naturāliem skaitļiem ir vismaz divi ar vienādu paritāti. To summa ir pārskaitlis.

Piezīme. Var arī aplūkot visas iespējas: P, P, P; P, P, N; P, N, N; N, N, N. Te: "*būri*" pāra/nepāra īpašība, "*zaķi*" – 3 dotie skaitļi.

3. Riņķī ir izkārtoti 9 aplīši. Vai var katrā aplītī ierakstīt vienu no deviņiem skaitļiem no 1 līdz 9 tā, lai jebkuros divos blakus esošos aplīšos skaitļu summa ir nepāra skaitlis?

Atrisinājums. Starp skaitļiem no 1 līdz 9 ir 5 nepāra skaitļi un 4 pāra skaitļi. Lai izpildītu uzdevuma nosacījumus, aplī visur blakus jābūt vienam pāra un otram nepāra skaitlim. Tā kā nepāra skaitļu ir vairāk, aplī blakus noteikti atradīsies divi nepāra skaitļi, kuru summa ir pāra skaitlis. Te: "*būri*" – vietas aplī starp pāra skaitļiem, "*zaķi*" – nepāra skaitļi.

4. Klasē ir 30 skolēni. Tomass matemātikas kontroldarbā ielaida 13 kļūdas. Nevienam citam skolēnam nebija tik daudz kļūdu. Pierādi, ka vismaz trim skolēniem bija vienāds kļūdu skaits (varbūt nebija nevienas kļūdas)!

Atrisinājums. Pavisam iespējami 13 pielaisto kļūdu varianti, neskaitot Tomasa rezultātu: neviena kļūda, 1 kļūda, 2, 3, …..12 kļūdas. Kļūdu skaits tiek pieņemts kā "*būri*", skolēni –"*zaķi*". Ja pieņem, ka vienādi rezultāti ir ne vairāk kā diviem skolēniem, tad, aprēķināsim lielāko iespējamo šādu gadījumu skaitu: iespējams, ka ir tieši 2 skolēni, kuriem nav neviena kļūda, tieši divi, kuriem ir 1 kļūda, …. tieši divi, kuriem ir 12 kļūdas, tad klasē būtu $2 \cdot 13 = 26$ skolēni. Tas neatbilst dotajam. Tātad 29 zaķus izvietojot 13 būros, vismaz vienā būri būs vismaz 3 zaķi.

5. Kādu vakaru Sniegbaltīte cienāja rūķus ar tikko ceptiem pīrādziņiem. Visi 10 rūķi kopumā apēda 35 pīrādziņus. Pamato, ka vismaz viens rūķis apēda vismaz 5 pīrādziņus, ja zināms, ka tieši viens rūķis apēda 1 pīrādziņu, otrs rūķis – tieši divus, bet vēl trešais rūķis – 3 pīrādziņus!

Atrisinājums. Pirmie trīs rūķi apēda kopumā 6 pīrādziņus. Atlika vēl 29 pīrādziņi. Ja 7 rūķi katrs būtu apēduši ne vairāk kā 4 pīrādziņus, tad viņi kopumā būtu apēduši ne vairāk kā 28 pīrādziņus, kas ir mazāk nekā dots. Tātad vismaz viens rūķis apēda vismaz 5 pīrādziņus. (Te: "*būri*" ir rūķi, bet "*zaķi*" – pīrādziņi.)

6. (* grūts uzdevums) Galdnieka plauktā ir dažāda garuma dēlīši, kuru garumi ir 1, 2, 3, … un 15 dm. Galdnieks izvēlējās kaut kādus 8 dēlīšus, kuri visi bija dažāda garuma. Vai starp izvēlētajiem dēlīšiem noteikti var atrast 3 tādus, ka divas no to garumu starpībām ir vienādas?

Piezīme. Lai skolēni labāk izprastu uzdevuma nosacījumus, ir ieteicama neliela uzskatāma demonstrācija – dēlīšu vietā var izmantot kartona lapiņas. Atbilstošais skaidrojums iesākumā var būt "nematemātisks" (skat. atrisinājumu). Uzdevumu risina, konstruējot pretpiemēru.

Atrisinājums. Vispirms noskaidrosim, ko nozīmē, ka starp 3 izvēlētiem dēlīšiem divas to garumu starpības ir vienādas. Pieņemsim, ka izvēlēto dēlīšu garumi ir 2, 4, 6 dm. Te iespējams aprēķināt 3 starpības: $4 - 2 = 2$; $6 - 4 = 2$; $6 - 2 = 4$. Šajā piemērā ir divas garumu starpības, kuras vienādas. Ja dēlīšus novieto vienu virs otra tā, ka to kreisie gali sakrīt un apakšā ir dēlītis 6 dm, vidū 4 dm un augšā 2 dm, tad redzams, ka labajā sakārtojuma pusē vidējā dēlīša gals atrodas pa vidu starp abu pārējo dēlīšu labās puses galiem.
Vienkāršības pēc aplūkosim atbilstošu situāciju uz skaitļu ass. Uz skaitļu ass ir atlikti skaitļi 0, 1, 2, …., 15. Tie atbilst dēlīšu garumiem – dēlīša garumu var izmērīt, atliekot to no 0 iezīmes.
Pirmīt aplūkotā situācija nozīmē, ka dotie 3 skaitļi uz skaitļu ass veido **simetrisku grupu**, tas ir, otrais skaitlis atrodas tieši pa vidu starp mazāko un lielāko skaitli. Tad uzdevuma jautājums ir – vai starp izvēlētajiem 8 skaitļiem noteikti atradīsies 3 tādi skaitļi, kuri uz skaitļu ass veido simetrisko grupu?
Pieņemsim, ka var atrast tādu 8 skaitļu izlasi, ka uzdevuma nosacījums neizpildīsies. Mēģināsim šādu virkni konstruēt. Vispirms aplūkosim pirmos 7 skaitļus no 1 līdz 7 un noskaidrosim, kāds ir lielākais skaitļu skaits, ko varam izvēlēties, lai nekādi 3 skaitļi no šiem nebūtu simetriski izvietoti uz skaitļu ass.
Nevaram izvēlēties 3 skaitļus pēc kārtas, jo tie veidos divas starpības vienādas ar skaitli 1. Varam izvēlēties, piemēram, skaitļus 1, 2, 4. Starpības, ko veido šie skaitļi ir 1, 2, 3. Varam izvēlēties ceturto skaitli, piemēram, 5. Tad starpības vienādas ar 1 veido četri skaitļi – 1; 2 un 4; 5. Arī starpību 3 veido divi dažādi skaitļu pāri (1; 4 un 2; 5). Skaitli 6 šajā virknē iekļaut nevar, jo tad veidojas simetriska grupa 2; 4; 6. Skaitli 7 arī nevar iekļaut, jo veidosies simetriska grupa 1; 4; 7. Līdzīgi var atrast vēl divas četru skaitļu virknes, kuras nesatur simetrisku 3 skaitļu grupu:

1; 2; 4; 5
1; 3; 4; 6
1; 2; 5; 7

Aplūkosim virkni 1; 2; 5; 7 un mēģināsim pievienot tai vēl 4 skaitļus, lai neveidotos simetriska 3 skaitļu grupa. Nevar pievienot 8, jo tad būs simetriska grupa 2; 5; 8. Nevar pievienot 9, jo 1; 5; 9 ir simetriska grupa. Nevar arī pievienot 12 un 13. Atliek skaitļi 10; 11; 14; 15. Bet 10 un 15 vienlaikus dotai virknei pievienot nevar (citādi būs simetriskā grupa 5; 10; 15). Tas parāda, ka šajā gadījumā 8 skaitļu virkni bez simetriskās grupas izveidot nevar.
Līdzīgi aplūko skaitļu virkni 1; 3; 4; 6.
Aplūkojot sākotnējo skaitļu virkni 1; 2; 4; 5, atrodam, ka ***var*** *izveidot tādu 8 skaitļu virkni, kura* ***nesatur*** *3 skaitļu simetrisku grupu:*
1; 2; 4; 5; 10; 11; 13; 14