

Punktiņš. (A Grupa) Grāmatvežu problēmas
1.02.2019

Nodarbības mērķis: Aplūkot darbības ar tabulām. Izmantot skaitļu kombinatorās īpašības, apgūt metodi “summēšana dažādos veidos”.

1. Tabulā 3 x 3 rūtiņas jebkādā secībā ieraksti visus skaitļus no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā vienu skaitli). Tad izveido otru tabulu 3 x 3 rūtiņas un arī te jebkādā secībā ieraksti visus skaitļus no 1 līdz 9. Izveido trešo tabulu 3 x 3 rūtiņas. Trešajā tabulā ieraksti pirmo divu tabulu skaitļu summu, tas ir, iedomājies, ka tabulas var uzlikt vienu uz otras un saskaita tieši tos divus skaitļus, kas atrodas viens virs otra un rezultātu ieraksta trešajā tabulā tieši tajā pašā pozīcijā. Apskati, kādi skaitļi ir trešajā tabulā – vai tie ir dažādi, vai ir kādi vienādi skaitļi?

Komentārs. Pirmais ir iesildīšanās uzdevums, lai skolēni saprastu kā notiek divu tabulu saskaitīšana. Skolēni var iegūt dažādus rezultātus. Nākamais uzdevums jau ir konkrēts, kur jāatrod speciāls skaitļu izvietojums.

2. Vai skaitļus pirmajās divās tabulās var ierakstīt tā, lai trešajā tabulā:

- a) Visi skaitļi ir vienādi?
 - b) visi skaitļi ir dažādi?
 - c) ir visi skaitļi no 10 līdz 18?
 - d) kādu secīgu deviņu skaitļu virkni vari iegūt?
(secīgi skaitļi – piemēram, 21, 22, 23, 24, ...)
- Uzraksti piemērus visiem gadījumiem a); b); c) un d)!

Atrisinājums. a) Ievērosim, ka $1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5$. Skaitļus abās tabulās var izvietot tā, lai trešajā tabulā visu skaitļu summas ir 10:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

 +

9	8	7
6	5	4
3	2	1

 =

10	10	10
10	10	10
10	10	10

- e) Abās tabulās var vienkārši ierakstīt visus skaitļus pēc kārtas, tad trešajā tabulā būs skaitļi 2, 4, 6, ...
- f) Skaitļus no 10 līdz 18 iegūt nevar. Skaitļu summa no 10 līdz 18 ir 126, bet skaitļu summa no 1 līdz 9 ir 45. Tāpēc no divām tabulām kopējā skaitļu summa ir tikai 90.
- g) Ievērojot, ka visu doto skaitļu summa ir 90, var izveidot secīgu skaitļu virkni 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

 +

6	7	5
9	1	8
4	2	3

 =

7	9	8
13	6	14
11	10	12

3. Vai skaitļus pirmajās divās tabulās vari ierakstīt tā, lai trešajā tabulā ierakstītu skaitļu starpības, atņemot no lielākā mazāko skaitli, tās būtu visi skaitļi no 0 līdz 8?

Atrisinājums. Jā, var:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

+

5	9	8
6	4	3
7	2	1

=

4	7	5
2	1	3
0	6	8

4. Tabulas 3 x 3 rūtiņās ieraksti skaitļus 0 un 1 tā, lai visās rindās un kolonās būtu vienādas skaitļu summas! Tas pats uzdevums, ja tabulā jāieraksta skaitļi 0, 1 un 2!

Atrisinājums.

1	1	0	2
1	0	1	2
0	1	1	2
2	2	2	

0	1	2	3
2	0	1	3
1	2	0	3
3	3	3	

5. Vai vari tabulā 3 x 3 rūtiņās ierakstīt skaitļus 0, 1 un 2 tā, lai katrā rindā, katrā kolonā un uz abām diagonālēm skaitļu summa ir atšķirīga?

Atrisinājums. Iespējamās 3 skaitļu summas ir 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 – kopā 7 dažādas summas. Bet tabulā ir 3 rindas, 3 kolonas un 2 diagonāles – kopā 8 līnijas. Tāpēc uzdevumā prasītais nav iespējams.

6. Ir doti seši naturāli skaitļi $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6$, kuru visu summa ir 10 un arī septiņi skaitļi $b_1; b_2; b_3; b_4; b_5; b_6; b_7$, kuru summa ir 13. No šiem skaitļiem izveidoja divas tabulas. a) Tabulai ir 6 rindas un 7 kolonas. Pirmajā rindā ir visas divu skaitļu summas, kuras iegūst pie a_1 pēc kārtas pieskaitot visus b skaitļus. Otrajā rindā b skaitļus pēc kārtas pieskaita skaitlim a_2 . Un tā turpina, veicot darbības ar visiem atlikušajiem skaitļiem. Kāda ir tabulas visu skaitļu summa? b) Veido tabulu, kurā ir 6 rindas un 7 kolonas. Līdzīgi pirmajā rindā raksta visus reizinājumus, kurus iegūst a_1 reizinot pēc kārtas ar visiem b skaitļiem. Tabulas pārējās rindas aizpilda līdzīgi. Kāda ir visu tabulas skaitļu summa?

Atrisinājums. a) Aplūkosim tabulu:

a_1+b_1	a_1+b_2	a_1+b_3	a_1+b_4	a_1+b_5	a_1+b_6	a_1+b_7
a_2+b_1	a_2+b_2	a_2+b_3	a_2+b_4	a_2+b_5	a_2+b_6	a_2+b_7
a_3+b_1	a_3+b_2	a_3+b_3	a_3+b_4	a_3+b_5	a_3+b_6	a_3+b_7
a_4+b_1	a_4+b_2	a_4+b_3	a_4+b_4	a_4+b_5	a_4+b_6	a_4+b_7
a_5+b_1	a_5+b_2	a_5+b_3	a_5+b_4	a_5+b_5	a_5+b_6	a_5+b_7
a_6+b_1	a_6+b_2	a_6+b_3	a_6+b_4	a_6+b_5	a_6+b_6	a_6+b_7

Ievērosim, ka katrā rindā kopumā ir saskaitīti visi skaitļi b , tātad to kopējā summa ir

$$6 \cdot 13 = 78$$

Savukārt katrā kolonā kopumā ir saskaitīti visi skaitļi a , to kopējā summa ir 70. Tātad tabulā ierakstīto skaitļu summa ir $78 + 70 = 148$.

b) Izveidosim otru tabulu:

$a_1 b_1$	$a_1 b_2$	$a_1 b_3$	$a_1 b_4$	$a_1 b_5$	$a_1 b_6$	$a_1 b_7$
$a_2 b_1$	$a_2 b_2$	$a_2 b_3$	$a_2 b_4$	$a_2 b_5$	$a_2 b_6$	$a_2 b_7$
$a_3 b_1$	$a_3 b_2$	$a_3 b_3$	$a_3 b_4$	$a_3 b_5$	$a_3 b_6$	$a_3 b_7$
$a_4 b_1$	$a_4 b_2$	$a_4 b_3$	$a_4 b_4$	$a_4 b_5$	$a_4 b_6$	$a_4 b_7$
$a_5 b_1$	$a_5 b_2$	$a_5 b_3$	$a_5 b_4$	$a_5 b_5$	$a_5 b_6$	$a_5 b_7$
$a_6 b_1$	$a_6 b_2$	$a_6 b_3$	$a_6 b_4$	$a_6 b_5$	$a_6 b_6$	$a_6 b_7$

Ievērosim, ka pirmās rindas summā var paņemt pirms iekavām a_1 :

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + a_1 b_4 + a_1 b_5 + a_1 b_6 + a_1 b_7 &= \\ &= a_1(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7) = a_1 \cdot 13 \end{aligned}$$

Katrā rindā ir kāds kopīgs reizinātājs, tad visas tabulas summa

$$\begin{aligned} a_1 \cdot 13 + a_2 \cdot 13 + a_3 \cdot 13 + a_4 \cdot 13 + a_5 \cdot 13 + a_6 \cdot 13 &= \\ &= 13(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) = 13 \cdot 10 = 130 \end{aligned}$$

