

Punktiņš. (A grupa) Kas vēl ir atlicis mūsu groziņā?
22.02.2019

Nodarbības mērķis: iepazīt naturālo skaitļu dalīšanas īpašības. Aplūkot, kādi atlikumi rodas, skaitļus dalot ar kādu izvēlētu skaitli; atklāt vispārīgas likumsakarības; sīkāk izpētīt atlikumu grupas.

1. Aprēķini visus atlikumus, kādi rodas, ja skaitli 113 dala ar 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9!

Atrisinājums. (Ievaduzdevums) Dalot skaitli 113 ar dotajiem skaitļiem, iegūst dažādus atlikumus:

Dalītājs	Dalījums	Atlikums
2	56	1
3	37	2
4	28	1
5	22	3
6	18	5
7	16	1
8	14	1
9	12	5

Ievērojam, ka visi atlikumi ir viencipara skaitļi.

2. Ar kādu skaitli vajag dalīt 113, lai atlikums būtu divciparu skaitlis? Atrodi tādu a) vismazāko dalītāju un tādu b) vislielāko dalītāju!

Atrisinājums. Ja skaitli 113 dalot ar n , rodas dalījums A un atlikums a , tad skaitli 113 var pierakstīt:

$$113 = A \cdot n + a$$

Lai dalīšanas atlikums a būtu divciparu skaitlis, dalītājam ir jābūt ne mazākam par 11. Padomāsim, kāds varētu būt skaitļa 113 vismazākais divciparu atlikums, ja to dala ar kādu skaitli. Vismazākais divciparu skaitlis ir 10. Ja skaitlis 10 ir dalīšanas atlikums, tad $A \cdot n$ var aprēķināt kā

$$A \cdot n = 113 - 10 = 103$$

Bet skaitlis 103 ir pirmskaitlis, to nevar sadalīt citādos reizinātājos kā vien $103 \cdot 1$. Tāpēc, 113 dalot ar kādu divciparu skaitli, nevar iegūt atlikumu 10. Ja atlikums ir 11, tad tādu dalītāju atrast var:

$$113 - 11 = 102$$

Skaitlis 102 dalās ar 6: $102 = 6 \cdot 17$

No tā iegūstam, ka, 113 dalot ar 17, atlikums ir 11. Varam pārbaudīt, ka atlikumi, dalot 113 ar skaitļiem 10; 11; 12; 13; 14; 15 un 16, veido viencipara atlikumus.

b) Skaitli 113 dalot ar 100, atlikums ir 13. Palielinot dalītāju par 1, atlikums samazināsies par vienu. Tā atrodam vislielāko dalītāju 103, kurš dos divciparu atlikumu 10.

3. Ar kādu divciparu skaitli dalot 113 tu vari iegūt vislielāko atlikumu?

Atrisinājums. Aplūkosim kādu skaitli N . Dalot skaitļus ar N , visi iespējamie atlikumi ir mazāki par pašu skaitli N . Vislielākais atlikums, ko veido skaitlis N , ir $N - 1$.

Aplūkosim vislielāko divciparu skaitli 99. Dalot ar 99 skaitli 113, iegūst atlikumu 14. Dalot 113 ar 98, rodas atlikums 15. Pamazinot dalītāju, atlikums palielināsies. Ir virkne skaitļu, kas skaitlī 113 ietilpst tikai vienu reizi. Atradīsim vislielāko skaitli, kas skaitlī 113 ietilpst 2 reizes:

$$113 : 2 = 56 \text{ atlikumā } 1.$$

$$\text{Jeb } 113 = 56 + 56 + 1$$

Seko, ka skaitlis 57 skaitlī 113 ietilpst vienu reizi. Tas ir mazākais dalītājs, kas skaitlī 113 ietilpst vienu reizi. Tāpēc

$$113 : 57 = 1 \text{ atlikumā } 56.$$

Esam atraduši, ka, dalot 113 ar divciparu skaitli 57, var iegūt vislielāko atlikumu.

4. Atrodi mazāko divciparu skaitli, kuru dalot ar 5 un ar 7 iegūst vienādu atlikumu!

Atrisinājums. Skaitlis 5 veido atlikumus 1; 2; 3; 4 un 0. Skaitlis 7 veido atlikumus 1; 2; 3; 4; 5; 6; un 0. Izrakstām virknē vairākus naturālos skaitļus 1; 2; 3; 4; ; 23;... Virknei apakšā pierakstām šo skaitļu atlikumus no dalījuma ar 5, trešajā rindā – no dalījuma ar 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5

Var ievērot, ka viencipara skaitļiem atlikumi līdz skaitlim 4 ir vienādi, bet turpmāk atšķiras. Skaitļa 5 atlikumu virknīte sastāv no 5 skaitļiem bet skaitļa 7 virknīte – no 7 skaitļiem. Atlikumi sakrītīs, kad būs pierakstītas septiņas secīgas virknītes ar skaitļa 5 atlikumiem un 5 secīgas virknītes ar skaitļa 7 atlikumiem. Tas būs skaitlis 35, kurš dalās ar 5 un 7, tāpēc te atlikums ir nulle. Vēl nākamajiem četriem skaitļiem arī atlikumi sakrītīs, piemēram, 36 dalot ar 5, atlikums ir 1, tāpat, 36 dalot ar 7, atlikums ir 1.

Vispārinot var teikt – atlikumi sakrītīs tiem skaitļiem, kuri vienlaikus dalās gan ar 5, gan 7 un atlikumi sakrītīs arī vēl tiem sekojošiem četriem skaitļiem.

5. Apskati tabulu! Kuru divu skaitļu summa dalās ar 11? Atrodi visus pārus! Kā pārlicināties, ka visi pāri ir atrasti?

9	46	79	13
64	90	2	97
25	31	20	22
4	52	55	7

Atrisinājums. Aplūkosim visus atlikumus, kādi rodas dotos skaitļus dalot ar 11:

9	2	2	2
9	2	2	9
3	9	9	0
4	8	0	7

Dotajā tabulā veiksīm šādu operāciju – ja skaitlis ir lielāks par 5, tad mēs no tā atņemsim 11:

-2	2	2	2
-2	2	2	-2
3	-2	-2	0
4	-3	0	-4

Ja divu skaitļu atlikumu summa, tos dalot ar 11, ir 0, tad šo skaitļu summa dalās ar 11. Tādi skaitļi ir 2 un -2; 3 un -3; 4 un -4; 0 un 0. Tabulā ir 3 skaitļu pāri, kas dod atlikumus (3; -3), (4; -4); (0; 0). Vēl ir skaitļi -2 un 2. Katrs skaitlis -2 veido pāri ar katru skaitli 2. Šādu pāru skaits ir $5 \cdot 5 = 25$. Dotajā tabulā kopumā var atrast 28 skaitļu pārus, kuru summa dalās ar 11.

Piezīme. Der aplūkot sīkāk, kāpēc divu šādu skaitļu summa dalās ar 11. Piemēram,

skaitļus var izteikt $64 = 5 \cdot 11 + 9$; $46 = 4 \cdot 11 + 2$, tad

$$64 + 46 = (5 \cdot 11 + 4 \cdot 11) + 9 + 2 = 9 \cdot 11 + 11 = 10 \cdot 11$$

6. Trīs brāļi nolēma agri no rīta doties ceļojumā – katrs savā virzienā. Līdzī ņemšanai viņi sakaltēja sausiņus, ko nolēma no rīta sadalīt vienādi. Nakts vidū viens no brāļiem sajūtās izsalcis un devās paņemt savu sausiņu daļu. Viņš sadalīja tos 3 vienādās kaudzītēs, bet viens sausiņš palika pāri, ko viņš apēda, kā arī vienu kaudzīti paņēma līdzī. Tad vēlāk naktī pamodās otrs brālis un gāja paņemt savu daļu. Nezinot, ka pirmais brālis jau sausiņus paņēmis, viņš darīja to pašu, un lieko sausiņu apēdis, paņēma savu kaudzīti. Arī trešais brālis jau pirms rītausmas rīkojās tāpat, un no rīta bija palikuši 22 sausiņi. Cik sausiņi bija sagatavoti?

Atrisinājums. Šo uzdevumu jārisina “no beigām”. Aplūkosim situāciju, kas brāļus sagaida no rīta:

22 sausiņi atstāti brāļiem:



Tā sausiņus sadalīja trešais brālis pirms rītausmas:



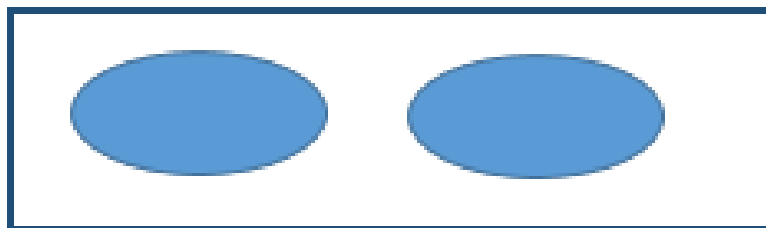
Tā sausiņus brāļiem atstāja otrais brālis:



Tā otrais brālis sadalīja sausiņus:



Tā sausiņus atstāja pirmais brālis:



Tā sadalīja sausiņus pirmais brālis:



Aplūkojot procesa shēmu, redzam, ka trešais brālis bija atstājis katram no brāļiem 11 sausiņus, bet pats paņēmis 12 sausiņus. Tas nozīmē, ka pirms rītausmas trešais brālis atrada 34 sausiņus. Tātad otrais brālis bija atstājis katram brālim 17 sausiņus, bet pats paņēmis 18. No tā seko, ka pirmais brālis bija atstājis 52 sausiņus, tātad katram brālim 26 sausiņus. Tā aprēķinām, ka sausiņu skaits iesākumā bija $26 + 26 + 26 + 1 = 79$.