Punktiņš. (B grupa) Ķer zaķi! (*Tēma: Dirihlē princips*)
25.01.2019

Īsi atrisinājumi un komentāri

1. Klasē ir 30 skolēni. Tomass matemātikas kontroldarbā ielaida 13 kļūdas. Nevienam citam skolēnam nebija tik daudz kļūdu. Pierādi, ka vismaz trim skolēniem bija vienāds kļūdu skaits (varbūt nebija nevienas kļūdas)!

Atrisinājums. Iespējamais skolēnu kļūdu skaits ir 13 – neviena kļūda, viena kļūda, divas,…. 12 kļūdas. Neskaitot Tomasu, klasē bija 29 skolēni. Ja pieņemsim, ka katras vienāda skaita kļūdas vienlaikus pieļāvuši ne vairāk kā 2 skolēni, tad skolēnu skaits būtu ne lielāks kā $13 \cdot 2 = 26$. Tā ir pretruna dotajam. Tātad klasē būs vismaz 3 skolēni, kuri kontroldarbā pielaiduši vienādu skaitu kļūdu (varbūt nevienu).

2. Kādu vakaru Sniegbaltīte cienāja rūķus ar tikko ceptiem pīrādziņiem. Visi 10 rūķi kopumā apēda 35 pīrādziņus. Pamato, ka vismaz viens rūķis apēda vismaz 5 pīrādziņus, ja zināms, ka tieši viens rūķis apēda 1 pīrādziņu, otrs rūķis – tieši divus, bet vēl trešais rūķis – 3 pīrādziņus!

Atrisinājums. Pirmie trīs rūķi apēda 6 pīrādziņus. Septiņiem rūķiem atlika 29 pīrādziņi. Ja katrs rūķis būtu apēdis ne vairāk kā 4 pīrādziņus, tad kopumā būtu apēsti ne vairāk kā 28 pīrādziņi. Tātad vismaz viens rūķis apēdis vismaz 5 pīrādziņus.

3. Doti 12 divciparu skaitļi. Pierādi, ka starp tiem var izvēlēties divus tādus skaitļus, ka to starpība ir tāds divciparu skaitlis, kurā abi cipari vienādi!

Atrisinājums. Skaitlis, kurā abi cipari ir vienādi, dalās ar 11. Dalot skaitļus ar skaitli 11, var rasties 11 dažādi atlikumi. Piemēram, ja dalīsim skaitļus 12; 13; 1; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21 un 22, iegūsim atlikumus: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 un 0, jo skaitlis 22 dalās ar 11.
Tātad ir iespējamas 11 atlikumu grupas, dotos skaitļus dalot ar 11. Tā kā ir doti 12 skaitļi, tad vismaz diviem skaitļiem būs vienādi atlikumi, tos dalot ar skaitli 11. Tāpēc to starpība dalīsies ar 11 – vienādie atlikumi saīsināsies.
Algebriski: viens skaitlis ir $A = 11k + b$, otrs skaitlis ir $B = 11n + b$.

Starpība $A - B = 11k + b - (11n + b) = 11k - 11n = 11(k - n)$ dalās ar 11.

4. Pierādi, ja izvēlas 51 dažādus naturālus skaitļus, kas mazāki par 100, var atrast divus tādus, kuru summa ir vienāda ar 100.

Atrisinājums. No skaitļiem 1 līdz 99 izveidosim visus tādus skaitļu pārus, kuru summa ir 100: (1; 99); (2; 98); (3; 97); ….. (49; 51). Bez pāra paliek skaitlis 50. Ievērojot, ka pāru ir 49, izvēloties 51 skaitli, kuri ir mazāki par 100, noteikti atradīsies divi skaitļi, kuri ir no viena pāra, tātad to summa ir 100.

5. Vai tabulā, kurā ir 6 x 6 rūtiņas, katrā no rūtiņām var ierakstīt skaitli 0, 1 vai -1 tā, lai visās tabulas rindās, kolonās un abās diagonālēs skaitļu summas būtu dažādas?

Atrisinājums. Iespējamās skaitļu summas ir -6; -5; ….4; 5; 6. Kopumā ir iespējamas 13 dažādas doto skaitļu summas. Tabulas līniju - rindu, kolonu un abu diagonāļu - kopējais skaits ir 14. Tāpēc, izvietojot tabulā dotos skaitļus, vismaz divās līnijās skaitļu summas būs vienādas.

6. Galdnieka plauktā ir dažāda garuma dēlīši, kuru garumi ir 1, 2, 3, … 15 dm. Galdnieks izvēlējās kaut kādus 8 dēlīšus, kuri visi bija dažāda garuma. Vai starp izvēlētajiem dēlīšiem noteikti var atrast 3 tādus, ka divas no to garumu starpībām ir vienādas?

Atrisinājums. Dēlīšu garumu vietā var aplūkot skaitļu virkni 1; 2; 3; . 15. Uzdevuma jautājums ir par to, vai jebkurā 8 skaitļu izlasē no dotajiem skaitļiem noteikti atradīsies 3 skaitļu aritmētiskā progresija. Aplūkojot variantus, **var** atrast tādu 8 skaitļu virkni, kas **nesatur** 3 skaitļu aritmētisko progresiju:

1; 2; 4; 5; 10; 11; 13; 14.