Punktiņš (B Grupa) stāsta par vecās mājas bēniņos atrasto noslēpumaino lādi.

08.02.2019

Īsi atrisinājumi un komentāri

1. Pirmais, ko bērni atrada noslēpumainajā lādē, bija metāla kaste ar 10 maisiņiem, kuros bija sudraba monētas. Uz maisiņiem kādreiz bija pielīmētas zīmītes, bet tagad tās visas atradās kastes apakšā. Uz 9 zīmītēm bija rakstīts "10 gramu sudraba monētas", bet uz vienas – "viltotās 9 gramu monētas". Kā uz svariem, kas rāda precīzo svaru, noteikt, kurā maisiņā ir viltotās monētas, sverot tikai vienu reizi?

Atrisinājums. Saliekam visus maisiņus rindā. No pirmā maisiņa ņem 1 monētu, no otrā – divas, no trešā – 3, …. , no desmitā maisiņa ņem 10 monētas, kopā 55 monētas. Visas paņemtās monētas liek uz svariem. Ja viltotā monēta bija pirmā maisiņā, tad monētu kopējais svars būs 549 grami (viena monēta 9 grami, bet 54 monētas 10 grami). Ja no otrā – tad ir divas monētas pa 9 grami, kopā 18 grami, bet pārējās 53 monētas svērs 530 grami, kopā 548 grami. Ja viltotās monētas no pēdējā maisiņa, tad visu monētu kopējais svars būs 540 grami. Tad te kopumā ir 10 iespējas. Kopējais monētu svars var būt 549, 548, 547, … 541 un 540 grami. Katrs no šiem svariem nosaka tieši cik viltotās monētas ir starp nosvērtajām, tad zinām arī maisiņu, no kura tās ņemtas.

2. Antons lādē atrada 1000 marmora lodītes un izlika tās garā rindā. Izrādījās, ka katrām divām blakus esošām lodītēm masas atšķiras tieši par 1 gramu. Antons vēlējās lodītes sadalīt divās vienādās daļās godīgi, lai pusi atdotu savai māsai Helēnai. Palīdzi viņam – kā sadalīt lodītes, lai abās daļās vienāds ir arī lodīšu kopējais svars!

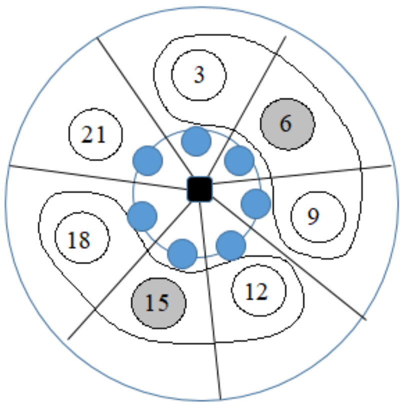
Atrisinājums. Sadalām visas lodītes pēc kārtas pa pāriem. Katrā pārī ir viena smagāka un otra vieglāka lodīte, ar svaru a un a+1. Tad ņemam divus pārus, kuru svari ir (a; a + 1) un (b; b + 1) un samainām lodītes ar vieglāko svaru, iegūstot (b, a + 1) un (a; b + 1). Abos pāros lodīšu kopējais svars ir a + b + 1. Vienu pāri liekam pa labi, otru pāri pa kreisi un tā turpinām ar nākošajiem diviem pāriem. Tā kā lodīšu skaits ir 1000, tas dalās ar 4, tāpēc lodīšu sadalīšana divās daļas saskaņā ar minētajiem nosacījumiem, ir iespējama.

3. Amēlijai izņēma dārgumu kastīti, kurā bija 49 rubīni, 49 smaragdi un viens 1 dimants. Klāt bija pievienots apraksts: "Dārgakmeņu masas ir 1 g, 2 g, 3 g, … , 99 g. Zināms, ka visi rubīni kopā sver par 2450 g vairāk nekā visi smaragdi kopā." Nebija saprotams, kāds ir katra dārgakmeņa svars. Cik sver dimants?

Atrisinājums. Visu dārgakmeņu kopīgais svars ir 4950 gramu. Apzīmēsim rubīnu kopējo svaru ar *r,* smaragdu kopējo svaru ar *s*. Tad $r - s = 2450$ g, kas ir gandrīz puse no visu dārgakmeņu kopējā svara. Šo svara starpību var sadalīt reizinātājos $2450 = 49 \cdot 50$. Secinām, ka šāda starpība iespējama tikai gadījumā, ja rubīnu masas ir no 51 g līdz 99 g, bet smaragdu masas - no 1 g līdz 49 g. Paskaidrosim sīkāk – var izveidot 49 pārus, kur rubīna un smaragda starpība ir tieši 50 gramu: (51 – 1); (52 – 2); (53 – 3); ….. (99 – 9). Tad smaragdu kopējais svars ir 1225, bet rubīnu svars ir 3675 g, kopā 4900 g. Tāpēc dimants sver 50 gramu.

4. (*Uzdevums variants ņemts no saita МЦНМО кужски*) Lādē atradās apaļa kaste ar sekojošu mehānisku rotaļlietu – tas bija disks ar septiņiem sektoriem. Ja disku pagriež, tad katrā sektorā parādās kāds vesels skaitlis, bet tuvāk diska ārējai malai parādās skaitļi, kuri ir dotā sektora un tam blakus esošo sektoru skaitļu summa. Šobrīd skaitļu summas ir 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21. Kāds skaitlis atrodas katrā sektorā?

Atrisinājums. Uz diska atrodas 14 skaitļi – 7 skaitļi katrā sektorā ir tuvāk centram (sauksim tos par *iekšējiem* skaitļiem), bet 7 – tuvāk diska ārpusei (sauksim tos par *malējiem*). Aprēķinām visu malējo skaitļu kopējo summu 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 = 84. Katrs iekšējais skaitlis šajā summā ir ieskaitīts 3 reizes, tāpēc iekšējo skaitļu summa ir 28. Aplūkosim 2 grupas, kurās ir pa trim malējiem skaitļiem pēc kārtas:



Tad pirmo sešu iekšējo skaitļu summa ir 6 + 15 = 21. Septītajā sektorā ir skaitlis 28 – 21 = 7. Līdzīgi atrodam pārējos skaitļus. Nākamo sektoru (no 2 līdz 7) iekšējo skaitļu summa ir 9 + 18 = 27, tāpēc pirmajā sektorā iekšējais skaitlis ir 1. Otrajā sektorā ir -5; trešajā ir 10; ceturtajā ir 4; piektajā ir -2; sestajā ir 13.

5. Helēna lādē atrada īstu pērļu virkni, kura bija savērta uz izturīga linu diega. Te bija baltās un ļoti retās sārtās pērles. Vienā virtenes galā bija baltā pērle, bet otrā – sārtā pērle. Helēna iedomājās – cik vietās šajā virknē atrodas blakus baltās un sārtās pērles? Nosaki, vai vietu skaits, kur blakus ir dažādu krāsu pērles, ir pāra vai nepāra skaitlis?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka virknē ir 2 pērles – balta un sārta. Tad tās virknē blakus ir tieši vienā vietā. Ja starp tām novietosim baltu pērli, tad vienā vietā blakus būs divas baltas pērles, bet dažādo pērļu skaits blakus joprojām atradīsies tikai vienā vietā. Tāpat var spriest, ja virknē starp balto un sārto pērli būtu novietota sārta pērle. Ja starp divām baltām pērlēm ievieto sārto, tad vietu skaits, kur blakus atrodas dažādu krāsu pērles, palielināsies par 2. Līdzīgi var turpināt spriedumu. Tātad vietu skaits, kur blakus atrodas dažādu krāsu pērles, šajā konstrukcijā palielināsies sekojoši 1 + 2 + 2 +… .Secinām, ka šo vietu skaits būs nepāra skaitlis.

Komentārs. Uzdevumu var risināt arī citādi, ne tikai induktīvi. Piemēram, var iztēloties, ka no virknes izņem tās pērles, kuras ir vairākas vienādas krāsas pērles pēc kārtas, atstājot šādas apakšvirknes vietā vienu pērli. Tad izveidojas virkne balta – sārta – balta – sārta - …pērles. Te ir pāra skaits pērļu un nepāra skaits “savienojumu”.

6. Pašā lādes apakšā bija vēl viena kaste ar 1001 zelta monētu. Uz kastes bija rakstīts "Trīs no šīm monētām ir viltotas – ar vieglāku svaru!" Kā ar divām svēršanām uz sviras svariem var atrast 200 īstās monētas?

Atrisinājums. uzliekam svaru abos kausos 500 un 500 monētas, vienu monētu atstājot malā. Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad malā noliktā monēta ir viltotā un katrā svaru kausu pusē ir tieši pa vienai viltotais monētai. Ņemam no vien kausa 500 monētas un dalām tās uz pusēm – katrā svaru kausā liekam pa 250 monētām. Tas svaru kauss, kas saturēs viltoto monētu, būs vieglāks. No otra kausa (kurš nosvēries uz leju) varam ņemt 200 īstas monētas.

Ja kausi ar 500 monētām nav līdzsvarā, tad vieglākajā kausā ir 2 vai visas 3 viltotās monētas. Ņemam monētas no smagākā kausa un rīkojamies kā iepriekš.