Punktiņš. (B grupa) Kas vēl ir atlicis mūsu groziņā?
22.02.2019.

Īsi atrisinājumi un komentāri.

1. Ar kādu skaitli vajag dalīt 113, lai atlikums būtu divciparu skaitlis? Atrodi tādu vismazāko dalītāju! Ar kādu skaitli dalot 113 tu vari iegūt vislielāko atlikumu?

Atrisinājums. Lai dalījuma atlikums būtu divciparu skaitlis, dalītājam pašam ir jābūt vismaz divciparu skaitlim. Piemēram, ja skaitli 113 dala ar 100, tad atlikums ir 13.

Ja skaitli 113 dalot ar kādu skaitli *n*, rodas dalījums *A* un atlikums a, tad skaitli 113 var pierakstīt:

$$113 = A \cdot n + a$$

Lai dalīšanas atlikums a būtu divciparu skaitlis, dalītājam ir jābūt ne mazākam par 11. Apskatīsim vismazāko divciparu skaitli 10. Ja skaitlis 10 ir dalīšanas atlikums, tad $A \cdot n$ var aprēķināt kā

$$A \cdot n = 113 - 10 = 103$$

Bet skaitlis 103 ir pirmskaitlis, to nevar sadalīt citādos reizinātājos, kā vien $103 \cdot 1$. Tāpēc, 113 dalot ar kādu divciparu skaitli, nevar iegūt atlikumu 10. Ja atlikums ir 11, tad tādu dalītāju atrast var:

$$113 - 11 = 102$$

Skaitlis 102 dalās ar 6: $102 = 6 \cdot 17$

No tā iegūstam, ka, 113 dalot ar 17, atlikums ir 11. Varam pārbaudīt, ka atlikumi, dalot 113 ar skaitļiem 10; 11; 12; 13; 14; 15 un 16, veido viencipara atlikumus.

Ja meklēsim vislielāko atlikumu, tad tas veidosies tad, ja skaitli 113 dalīsim ar tādu skaitli, kas skaitlī 113 ietilpst tikai vienu reizi. Jo mazāks būs šis skaitlis, jo lielāku atlikumu iegūsim. Skaitli 113 var izteikt kā

$$113 = 56 + 56 + 1 = 56 + 57$$

Dalot skaitli 113 ar 57, iegūsim vislielāko atlikumu 56.

2. Arņa tētis saņēma lielu prēmiju, ko var pierakstīt kā četrciparu skaitli. Kad Arnis jautāja, cik liela tā ir, tētis atbildēja: “Pirmo trīs ciparu summa ir mazākais trīsciparu skaitlis, kura ciparu summa ir 24. Ja visu skaitli dala ar 4, tad atlikums ir 2, bet ja dala ar 7, tad atlikums ir 5.” Cik liela bija prēmija?

Atrisinājums. Vispirms aplūkosim, kādi 3 cipari summā ir vienādi ar 24. Tie var būt 8; 8; 8 vai 7; 8; 9, vai 6; 9; 9. Tātad vismazākais šāds trīs ciparu skaitlis ir 699. Visu prēmijas skaitli var pierakstīt kā 6990 + a, kur a ir pēdējais skaitļa cipars. Skaitli 6990 dalot ar 4, iegūst atlikumu 2. Skaitli 6990 dalot ar 7, iegūst atlikumu 4. Tāpēc pēdējais skaitļa cipars nevar būt 0. Ņemot vērā atlikumus, kādi rodas, skaitli dalot ar 4, pēdējais cipars varētu būt 4 vai 8. Pārbaudām abus gadījumus – skaitli 6994 dalot ar 7, atlikumā iegūst 1, bet skaitli 1998 dalot ar 7, atlikumā iegūst 5. Tātad Arņa tēva prēmija bija 6998 eiro liela.

3. Tilērijas pavalstī ir tikai divu nomināciju naudas monētas – 3 tilleri un 5 tilleri. Pierādi, ka iespējams samaksāt jebkuru naudas summu, kas lielāka par 7 tilleriem!

Atrisinājums. Naudas monētas apzīmēsim 3T un 5T. Ja izdosies izteikt 8; 9; 10; 11; 12; 13; 15 un 15 naudas summas, tad jebkuras citas summas var izteikt kā doto skaitļu summas (piemēram, 16 = 8 + 8; 17 = 8 + 9; 19 = 9 + 10 un visas pārējās var iegūt no dotajām, pieskaitot attiecīgo reižu skaitu 10).

$$8T = 3T + 5T;\ 9T = 3 \cdot 3T;\quad 10T = 2 \cdot 5T;\ 11T = 2 \cdot 3T + 5T;\ 12T = 4 \cdot 3T;$$

$$13T = 3T + 2 \cdot 5T; \;\; 14T = 3 \cdot 3T + 5T; \;\; 15T = 3 \cdot 5T$$

Esam pamatojuši, ka iespējams samaksāt jebkuru naudas summu, kas lielāka par 7 tilleriem.

4. Dārzniekam parkā bija jāizveido skaista, ģeometriska puķudobe. Viņš izdomāja visus puķu stādus izvietot vienādos attālumos divās rindās, bet viens stāds palika pāri. Tad viņš mēģināja stādus izvietot 3 rindās, atkal viens palika pāri. Tad dārznieks centās izvietot stādus 4, 5 un 6 rindās, bet katru reizi viens stāds palika pāri. Viņam izdevās stādus izvietot 7 rindās. Kāds varēja būt mazākais stādu skaits?

Atrisinājums. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem, ir jāatrod tāds skaitlis N, kuru dalot ar 2; 3; 4; 5 un 6, rodas atlikums 1. Pats skaitlis dalās ar 7. Ja mēs no N atņemsim 1, tad $N – 1$ dalīsies ar 2; 3; 4; 5 un 6. Mazākais skaitlis, kurš dalās ar nosauktajiem ir 60. Bet 61 nedalās ar 7. Tātad meklētais skaitlis $N = 60 \cdot k + 1$. Aplūkojam skaitļus 121; 181; 241; 301. Pēdējais dalās ar 7:

$$301 : 7 = 43.$$

Tātad mazākais stādu skaits, kāds varēja būt dārzniekam, ir 301 stāds.

5. Trīs brāļi nolēma agri no rīta doties ceļojumā – katrs savā virzienā. Līdzi ņemšanai viņi sakaltēja sausiņus, ko nolēma no rīta sadalīt vienādi. Nakts vidū viens no brāļiem sajutās izsalcis un devās paņemt savu sausiņu daļu. Viņš sadalīja tos 3 vienādās kaudzītēs, bet viens sausiņš palika pāri, ko viņš apēda, kā arī vienu kaudzīti paņēma līdzi. Tad vēlāk naktī pamodās otrs brālis un gāja paņemt savu daļu. Nezinot, ka pirmais brālis jau sausiņus paņēmis, viņš darīja to pašu, un lieko sausiņu apēdis, paņēma savu kaudzīti. Arī trešais brālis jau pirms rītausmas rīkojās tāpat, un no rīta bija palikuši 22 sausiņi. Cik sausiņi bija sagatavoti?

Atrisinājums. No rīta atrastie 22 sausiņi bija atstāti pirmajam un otrajam brālim. Trešais brālis katram bija iedalījis 11 sausiņus, bet pats paņēma 12. Otrais brālis abiem saviem brāļiem bija atstājis 34 sausiņus, 17 katram, bet pats paņēma18 sausiņus. Tātad pirmais brālis bija atstājis 52 sausiņus, bet pats paņēmis 27. Iesākumā kopā bija 79 sausiņi.

6. (* - grūtāks uzdevums) Kādiem naturāliem skaitļiem n izteiksme $n^3 + 11n$ dalās ar 6?

Atrisinājums. Izteiksmi var sadalīt reizinātājos $n(n^2 + 11)$. Viegli pamatot, ka izteiksme dalās ar 2 – ja n ir pārskaitlis, tad tas dalās ar 2, bet, ja n ir nepāra skaitlis, tad ar 2 dalās skaitlis iekavās, kas ir divu nepārskaitļu summa. Dalāmībai ar 3 var aplūkot 3 gadījumus:

a) $n = 3k$, tad izteiksme $3k(9k^2 + 11)$ dalās ar 3.

b) $n = 3k + 1$, tad izteiksme ir

$$(3k + 1)(9k^2 + 6k + 1 + 11) = (3k + 1)(9k^2 + 6k + 12),$$

otrajās iekavās visi saskaitāmie dalās ar 3, tātad dotā izteiksme dalās ar 3.

c) $n = 3k + 2$, tad

$$(3k + 2)(9k^2 + 12k + 4 + 11) = (3k + 2)(9k^2 + 12k + 15),$$

kur summa otrajās iekavas dalās ar 3.

Tātad, dotā izteiksme dalās ar 6 jebkuram naturālam skaitlim n.