Mājas darbs uz izlases kandidātu vecākās grupas nodarbību 2019. gada 5. oktobrī

Lai nodrošinātu aptuveni līdzīgu grūtāko olimpiāžu uzdevumu risināšanai nepieciešamo pamatzināšanu līmeni izlases kandidātu starpā, daļa no mājas darba ir saistīta ar patstāvīgu tehnisko pamatzināšanu apgūšanu — ja tās pašlaik nav apgūtas.

Uz šo reizi jāapgūst zināšanas, kas saistītas ar kompleksajiem skaitļiem:

1) kompleksā skaitļa jēdziens un aritmētisko darbību izpildīšana kompleksajiem skaitļiem formā $a + bi$ (complex numbers), kompleksā skaitļa absolūtā vērtība,

2) komplekso skaitļu trigonometriskā forma, reizināšanas, dalīšanas, celšanas n-tajā pakāpē un n-tās pakāpes saknes vilkšanas izpilde kompleksiem skaitļiem trigonometriskajā formā (trigonometric form of a complex number),

3) komplekso skaitļu eksponenciālā forma (exponential form of a complex number),

4) komplekso skaitļu ģeometriskā attainošana: kompleksā plakne ar taisnleņķa koordinātu sistēmu un ar polāro koordinātu sistēmu (complex plane).

Lai palīdzētu sagatavoties un pārbaudīt, vai pārzināt attiecīgās tēmas, šeit, zemāk ir atrodami vingrinājumi. Vingrinājumu atrisinājumi nav jāiesūta. Ja esat pārliecināti, ka attiecīgās tēmas labi pārzināt, varat nerisināt vingrinājumus un uzreiz pāriet pie uzdevumu risināšanas.

Par tēmām, kuras jums nav pazīstamas, aicinu tīmeklī atrast jums piemērotāko avotu (angļu valodā atrodami dažādu sarežģītības līmeņu materiāli). Ticami, ka jums pietiks ar Vikipēdijā atrodamo. Varat, protams, izmantot arī jums pieejamās matemātikas grāmatas, ja starp tām ir šīm tēmām piemērotas.

Ja, apgūstot minētās tēmas vai risinot uzdevumus, rodas grūtības vai jautājumi, ar kuriem paši netiekat galā, lūdzu rakstīt e-vēstuli uz adresi “juris punkts smotrovs @ lu punkts lv” vai izrunāt neskaidrības pašas nodarbības laikā.

1 Vingrinājumi

1. Komplekso skaitli $\cos\alpha + i\sin\alpha$ apzīmēsim ar $e^{i\alpha}$ (lasa "e pakāpē i reiz α"; šeit $e = 2,718281828\ldots$ ir Eilera skaitlis, naturālā logaritma bāze). Pamatojiet vienādības:

a) $|e^{i\alpha}| = 1$;

b) $(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}$ (Muavra formula);

c) $(e^{i\alpha})^{-1} = e^{-i\alpha}$;

d) $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i\alpha + i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$;

e) $(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})/2 = \cos\alpha$;

f) $(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})/(2i) = \sin\alpha$ (pēdējās divas — Eilera formulas).

2. Kā patvaļīgu kompleksu skaitli izsaka trigonometriskajā, eksponenciālajā formā? Atrodot piemērotu leņķi α, izsakiet formā $e^{i\alpha}$ kompleksos skaitļus i, $(1+i\sqrt{3})/2$, $(\sqrt{3}+i)/2$, $-i$, $(1-i\sqrt{3})/2$, $(\sqrt{3}-i)/2$. Kāda ir leņķa α ģeometriskā jēga?

3. Uzzīmējiet kompleksajā plaknē

a) visus skaitļus z formā $e^{i\alpha}$, kur $0 \le \alpha \le 2\pi$;

b) visus skaitļus z formā $r \cdot e^{i\alpha}$, kur $0 \le r < 1$, $0 \le \alpha \le 2\pi$;

c) visus skaitļus z formā $r \cdot e^{i\alpha}$, kur $r > 1$, $0 \le \alpha \le 2\pi$.

Izdariet to pašu ar nosacījumu $0 \le \alpha \le \pi$.

4. Ko ar kompleksu skaitli z izdara tā pareizināšana ar i? Ar $-i$? Ar $(1+i\sqrt{3})/2$? Ar $(1-i\sqrt{3})/2$?

5. Uzzīmējiet kompleksajā plaknē skaitļus z, $ze^{i\alpha}$, $ze^{-i\alpha}$. Ko ģeometriski nozīmē pareizināšana ar $e^{i\alpha}$? Ar $e^{-i\alpha}$? Kā viens pret otru ir novietoti skaitļi z un $z \cdot r \cdot e^{i\alpha}$, kur $r > 0$ ir reāls skaitlis?

6. Ar Muavra formulas palīdzību pierādiet, ka

a) $\cos nx$ ir izsakāms kā n-tās pakāpes polinoms no $\cos x$; aprēķiniet šos polinomus gadījumos $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$;

b) $\sin nx$ ir izsakāms kā $\sin x$ reizinājums ar $(n-1)$-ās pakāpes polinomu no $\cos x$; aprēķiniet šos polinomus gadījumos $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$;

c) jebkuru izteiksmi formā $(\cos x)^m(\sin x)^n$, kur m, n ir nenegatīvi veseli skaitļi, var izteikt kā lineāru kombināciju no kosinusiem un sinusiem no x daudzkārtņiem (tas ir, x, pareizinātiem ar veseliem skaitļiem).

7. Izmantojot robežas

$$e = \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} \qquad \text{un} \qquad 1 = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t},$$

kā arī Muavra formulu, pierādiet, ka

a)
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\alpha}{n}\right)^n = e^{i\alpha};$$

b)
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n = e^x \cdot e^{iy}.$$

Pēdējā vienādība ir pamatā skaitļa e kompleksas pakāpes definīcijai: par skaitli e^z, kur $z = x + iy$, sauc skaitli $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Ja $y = 0$, tad e^z ir parastā pakāpes funkcija e^x; ja $x = 0$, tad e^z ir $e^{iy} = \cos y + i\sin y$. Pārbaudiet, ka šādi definētam e^z izpildās īpašības a)–d) no 1. vingrinājuma.

8. Ar svītru virs skaitļa apzīmēsim kompleksi saistītā aprēķināšanas darbību: $\overline{x+iy} = x - iy$. Skaitļi z un $\overline{z}$ ir viens otram simetriski attiecībā pret reālo asi. Pārbaudiet, ka $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1-z_2} = \overline{z_1}-\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$, $|z|^2 = z\cdot\overline{z}$. Izmantojot šīs īpašības, pierādiet, ka $\overline{f(z_1,\ldots,z_n)} = f(\overline{z_1},\ldots,\overline{z_n})$, ja $f(z_1,\ldots,z_n)$ ir izsakāms, mainīgajiem z_1, z_2, $\ldots$, z_n galīgu skaitu reižu pielietojot aritmētiskās darbības.

9. Kompleksajā plaknē ir novietots kvadrāts, kuram divas blakusvirsotnes ir skaitļi $1+3i$ un $3-2i$. Atrodiet pārējās divas virsotnes (atrodiet visus atrisinājumus).

10. Dots nogrieznis ar galapunktiem $3-5i$, $4-9i$ un nogrieznis ar galapunktiem $10+5i$, $-7-2i$. Kurā punktā tie krustojas?

11. Regulārs piecstūris $ABCDE$ ir ievilkts riņķa līnijā ar vienības rādiusu. Aprēķiniet $AB\cdot AC\cdot AD\cdot AE$.

2 Risināmie un iesniedzamie mājas darba uzdevumi

Lūdzu uzrakstīt un iesniegt atrisinājumus (elektroniski pirms nodarbības vai uz papīra nodarbības sākumā), lai cik uzdevumus jums izdotos atrisināt (arī tad, ja tikai vienu).

1. Pierādiet, ka polinoms $1 + x^{1111} + x^{2222} + \ldots + x^{9999}$ dalās ar polinomu $1+x+x^2+\ldots+x^9$. Kādām naturālo skaitļu m un n vērtībām polinoms $1 + x^n + x^{2n} + \ldots + x^{mn}$ dalās ar polinomu $1 + x + x^2 + \ldots + x^m$?

2. Kompleksie skaitļi z_1, z_2, ..., z_n pēc moduļa nepārsniedz 1. Pierādiet, ka summā

$$z_1 \pm z_2 \pm z_3 \pm \ldots \pm z_n$$

var salikt "+" un "−" zīmes tā, lai iegūtā summa pēc moduļa nepārsniegtu $\sqrt{2}$.

3. Uz trijstūra ABC malām ārpus trijstūra ir uzkonstruēti regulāri trijstūri (kuriem viena no malām sakrīt ar attiecīgo trijstūra ABC malu). Pierādīt, ka triju regulāro trijstūru centri paši veido regulāru trijstūri.

4. Plaknē ir doti divi kvadrāti $A_1B_1C_1D_1$ un $A_2B_2C_2D_2$ (to virsotnes uzskaitītas pulksteņa rādītāja virzienā). No kāda punkta O ir atlikti vektori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, kas attiecīgi vienādi ar vektoriem $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$, $\overrightarrow{D_1D_2}$. Pierādiet, ka arī $ABCD$ ir kvadrāts.

5. Četri pareizi ejoši, iespējams, dažādu izmēru pulksteņi ir izvietoti plaknē ar ciparnīcām uz augšu tā, ka to centri veido kvadrātu. Kādā laika brīdī šo četru pulksteņu minūšu rādītāju gali veido kvadrātu. Pierādīt, ka šo pulksteņu minūšu rādītāju gali veido kvadrātu jebkurā laika brīdī. (Pieņemiet, ka pulksteņi ir bezgalplāni.)