

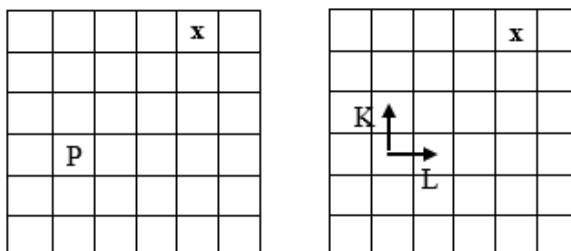
Punktiņš. (A grupa) Pelīte un siers

11.10.2019

Nodarbības mērķis: aplūkot kombinatoriālās ģeometrijas uzdevumus; vingrināt telpisko iztēli; mācīties orientēties kartē pēc norādēm.

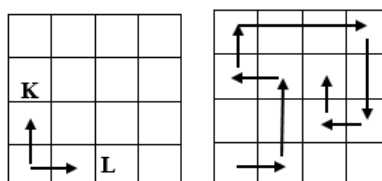
Piezīme. Lai labāk izprastu, kā aprēķināt variantu vai kombināciju skaitu, ieteicams uzrakstīt visus iespējamās doto elementu sakārtojumus.

1. Pelīte dzīvo pagrabā, kurā ir 6 x 6 kambari, kur starp katriem diviem blakus esošiem kambariem ir durvis. Šobrīd viņa atrodas kambarī, kas apzīmēts ar P, un ir saodusi, ka kambarī x ir siers. Viņai ir instrukcija, starp kuriem kambariem ir atvērtas durvis, tā ka viņa zina, vai ejot pagriezties pa labi vai pa kreisi. Pārbaudi, vai ar sekojošu instrukciju pelīte nonāks pie siera: L(2), K, L, L(3), L, L, K(2), K, L, L(3), L, K, L(2), K!

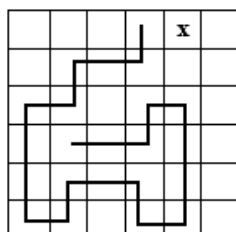


Paskaidrojums: Ja pelīte atrodas kambarī P, tad otrajā attēlā norādīts, kur pelītei ir labās puses L un kreisās puses K durvis, kad viņa skatās siera virzienā. Skaitlis 2 (vai 3) iekavās norāda, ka pelīte iziet cauri divām (vai trim) durvīm vienā virzienā. Pagrieziens pa labi vai kreisi jāveic attiecībā pret nupat izdarīto gājieni. Ceļa piemērs:

L; K(2); K; L; L(3); L(2); L

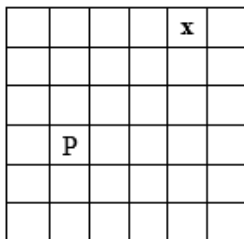


Atrisinājums. Pelīte nonāks blakus kambarī:

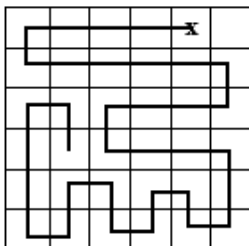


Piezīme. Ceļu vieglāk uzzīmēt, ja rūtiņu kvadrātu pagriež dotā gājiena virzienā uz augšu.

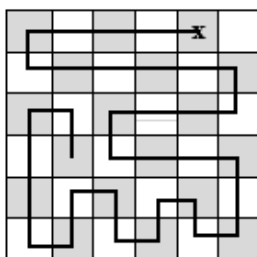
2. Kāds ir garākais ceļš no pelītes kambara līdz kambarim, kur glabājas siers, ja viņa jebkurā kambarī ieies ne vairāk kā vienu reizi? Uzzīmē šādu ceļu! Uzraksti šī ceļa instrukciju L un K terminos, nosakot, uz kuru pusi pelīte ir pagrieziesies savā kambarī.



Atrisinājums. Dotajā pagrabā ir 36 kambari. Pelīte veiks garāko ceļu, ja viņa izies cauri visiem kambariem, tas ir, cauri 35 durvīm. Viņas ceļš varētu būt, piemēram, šāds:



Lai kā arī mēs pūlētos uzzīmēt ceļu cauri visām rūtiņām, vienmēr paliek viena rūtiņa, kurā pelītes ceļš neieiet. Kāpēc tas tā ir? Iekrāsosim rūtiņu kvadrātu kā šaha dēlīti:

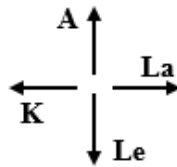


Ceļš secīgi iet caur melnu – baltu – melnu – baltu - ... rūtiņām un beidzas atkal ar melnu rūtiņu. Kopumā ceļā ir 18 melnas rūtiņas un tikai 17 baltas, jo ceļš sākas un beidzas ar melnajām rūtiņām. Tāpēc kaut kāda balta rūtiņa šajā ceļā netiks iekļauta. Garākais ceļš satur 34 soļus jeb pelīte izies caur 34 durvīm.

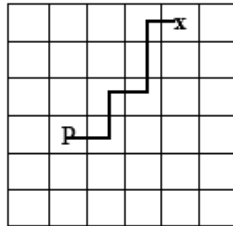
Attēlā norādītā ceļa instrukcija (ja pelīte līdzīgi kā pirmajā uzdevumā skatās siera virzienā): K; K; K(3); K; K; L; L; K; K; L; L; K; K(2); K(3); L; L(3); K; K(5); L; L(4)

3. Kāds ir īsākais ceļš no kambara, kur atrodas pelīte līdz kambarim, kurā ir siers? Cik ir tādu īsāko ceļu?

Atrisinājums. Šajā uzdevumā pelītes pārvietošanos noteiksim citādi. Ievērosim četrus virzienus attiecībā pret doto zīmējuma novietojumu. Tie būs: uz augšu, uz leju, pa labi, pa kreisi:



Pelīte veiks īsāko ceļu, ja viņa pārvietosies tikai pa labi un uz augšu, piemēram:



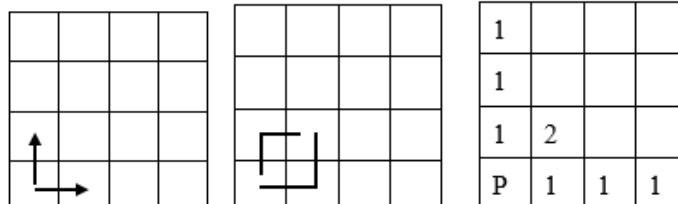
Te pelītes ceļu var aprakstīt šādi: La, A, La, A, A, La.

Ievērosim, ka visi šādi īsākie ceļi atrodas kvadrāta 4 x 4 robežās. Tāpēc pārformulēsim uzdevumu citādi:

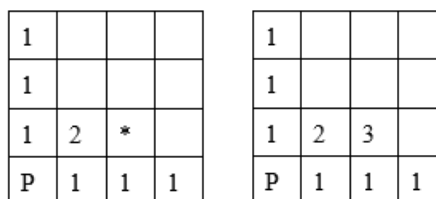
Cik dažādi ceļi ir kvadrātā 4 x 4 no kreisā apakšējā stūra uz labo augšējo, izmantojot tikai gājienus pa labi (L) un uz augšu (A)?

Atzīmēsim, cik veidos var nokļūt katrā rūtiņā, ejot no kreisās apakšējās rūtiņas:

Blakus rūtiņās katrā var nokļūt tikai vienā veidā; diagonālajā blakus rūtiņā var nokļūt 2 veidos; visās apakšējās un visās kreisajās rūtiņās var nokļūt tikai vienā veidā:



Rūtiņā * var nokļūt tikai no tām rūtiņām, kas atrodas tai apakšā, vai no tās, kura ir no rūtiņas * pa kreisi, tāpēc kopumā ir 3 ceļi, kā nokļūt rūtiņā *:

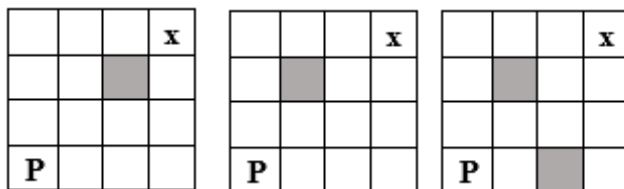


Tā varam pēc kārtas katrai rūtiņai aprēķināt, cik veidos var tajā nokļūt, summējot to variantu skaitu, kas norādīts rūtiņās pa kreisi un apakšā no dotās rūtiņas:

1	4	10	20
1	3	6	10
1	2	3	4
P	1	1	1

Pavisam ir 20 dažādi īsākie ceļi, kā pelīte no sava kambara var nokļūt pie siera.

4. Iezīmētais kambaris ir aizslēgts, pelīte tajā iekļūt nevar. Cik tagad ir īsāko ceļu līdz sieram?



Atrisinājums. Te jāievēro tas pats princips, kā iepriekšējā uzdevumā – katrai rūtiņai jāskaita blakus esošo rūtiņu (apakšējās un rūtiņas pa kreisi) ceļu skaits:

1	4	4	8
1	3		4
1	2	3	4
P	1	1	1

1	1	4	11
1		3	7
1	2	3	4
P	1	1	1

1	1	3	7
1		2	4
1	2	2	2
P	1		

Pelītei aizslēgto durvju gadījumā ir iespējams pie siera nokļūt pa 8, vai pa 11, vai 7 ceļiem atbilstoši. Ievērosim, ka trešajā gadījumā ir pat viens neaizslēgts kambaris, kurā pelīte nevar iekļūt, ejot tikai pa labi un uz augšu.

5. Pie ieejas pagrabā ir 4 pakāpieni. Pelīte ir izdomājusi šādu rotaļu – uzlekt pa pakāpieniem dažādos veidos – vai nu uzlecot uz katra pakāpiena pēc kārtas, vai pārlecot uzreiz visiem pakāpieniem pāri, vai arī citādi. Cik veidos pelīte var uzlekt augšā pa šiem 4 pakāpieniem?

Atrisinājums. Pelīte lec augšā, tāpēc katra lēcieni sērija beigsies tieši ar ceturto pakāpienu. Pelīte uz pirmajiem trim pakāpieniem var neuzlekt vispār, vai var uz katra pakāpiena uzlekt vienu reizi, vai lekt citādi. Pierakstīsim visas iespējas:

Pelīte uzlec uz 1, 2, 3, un 4 pakāpiena: 1, 2, 3, 4

Lēcieni varianti:

- 1, 2, 3, 4
- 1, 2, 4
- 1, 3, 4
- 2, 3, 4
- 1,, 4
- 2, 4
- 3, 4
- 4

Kopumā ir 8 dažādi lēcieni varianti.

Piezīme. Uzdevumu var risināt arī citādi. Pelīte uz katra no trim pirmajiem pakāpieniem vai nu uzlec, vai neuzlec. Ir divas iespējas, vai pelīte uzleks uz pirmā pakāpiena. Tās kombinējas ar divām iespējām uzlekt uz otrā pakāpieni, tāpat divām iespējām uzlekt uz trešā pakāpiena. Uz ceturto pakāpienu jāuzlecs jebkurā gadījumā. Variantu skaits ir aprēķināms sekojoši:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

6. Pelīte ir izdomājusi jaunu rotaļu – viņa lēkā pa 4 pakāpieniem, lai tiktu augšā, uz katra pakāpiena uzlecot tieši vienu reizi. Cik veidos viņa to var izdarīt?

Atrisinājums. Ceturtais lēciens vienmēr ir tieši uz ceturto pakāpienu. Dažādie lēcienų varianti ir uz pirmo, otro un trešo pakāpienu. Pieņemsim, ka pelīte izvēlas, vai viņa uz pirmā pakāpiena uzleks pirmajā vai otrajā, vai trešajā lēcienā. Ja viņa šo izvēli ir izdarījusi, tad viņai atliek divas iespējas, kā noteikt, kurš lēciens atgadīsies uz otrā pakāpiena, tad trešajam pakāpienam lēciena kārtas numurs ir noteikts. Kopumā ir $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ dažādi lēcienų varianti.

Pierakstīsim tos:

1, 2, 3, 4

1, 3, 2, 4

2, 1, 3, 4

2, 3, 1, 4

3, 1, 2, 4

3, 2, 1, 4

Padomu un iedvesmas avots:

Andras Szilard. Elementary combinatorial geometry. GIL Publishing House, 2007