

Punktiņš. (B grupa) Skaitļu virknītes

04.10.2019

Īsi atrisinājumi un komentāri

1. Virknē pierakstīti vairāki skaitļi 10, 15, 21, 4, 5. Katru divu blakus esošo skaitļu summa ir kvadrāts: 25, 36, 25, 9. Uzraksti visas iespējamās piecu dažādu naturālu skaitļu virknītes, lai katru divu sekojošu skaitļu summa būtu tāda pati, kā piemērā!

Atrisinājums. Pēdējo divu virknes skaitļu summa ir 9, ko var sastādīt 8 veidos. Virkni konstruē, sākot no beigām. Piemēram, ja izvēlamies pēdējo skaitli 8, tad aprēķinām visus virknes skaitļus un iegūstam

13, 12, 24, 1, 8

Kopumā var iegūt 7 dažādas virknes, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem. Virkne, kas beidzas ar 2, neder (*pārbaudi, kāpēc neder!*).

2. Kādu garāko dažādu naturālu skaitļu virknīti vari izveidot, lai blakus esošo skaitļu summas atkārtotos 25, 36, 25, 36, 25, ...? Pamato, ka virknīte ir garākā!

Atrisinājums. Ievērosim, ka virknes skaitļi nedrīkst pārsniegt 24. Katrs virknes skaitlis, izņemot pirmo un pēdējo, piedalās divu summu veidošanā – gan kā skaitļa 25 saskaitāmais, gan kā skaitļa 36 saskaitāmais. Apskatīsim visas divu skaitļu summas, kas ir 36 un atbilst minētajiem nosacījumiem:

$$36 = 24 + 12 = 23 + 13 = 22 + 14 = 21 + 15 = 20 + 16 = 19 + 17$$

Virknes skaitļiem jābūt dažādiem, tāpēc 18 + 18 neder. Ja virknē ir iekļauts kāds šo skaitļu pāris, tad tiem jāpieskaita skaitļi, kas mazāki par 12 (izņemot saskaitāmos 12 un 13), lai summā iegūtu 25. Līdz ar to no aplūkotajām summām var izvēlēties augstākais divus skaitļu pārus, lai iegūtu garāko virkni, kurā ir 7 skaitļi :

2, 23, 13, 12, 24, 1, 35

Otrs variants satur tos pašus skaitļus otrādā secībā.

3. Sakārto skaitļus no 1 līdz 17 virknē tā, lai katru divu blakus esošo skaitļu summa ir kāda skaitļa kvadrāts! Vai vari izveidot vairākas tādas virknes?

Atrisinājums. Lielāko divu skaitļu no dotajiem summa ir $16 + 17 = 33$. Iespējamie skaitļu kvadrāti, kurus var iegūt, tad ir 4, 9, 16 un 25. Pierakstīsim visas iespējas, kā šos kvadrātus var iegūt:

$$4 = 1 + 3$$

$$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$$

$$16 = 1 + 15 = 2 + 14 = 3 + 13 = 4 + 12 = 5 + 11 = 6 + 10 = 7 + 9$$

$$25 = 17 + 8 = 16 + 9 = 15 + 10 = 14 + 11 = 13 + 12$$

Šajā sarakstā atrodam, ka skaitļi 16 un 17 katrs piedalās tikai vienā summā – tāpēc virkne sāksies ar 16 un beigsies ar 17 vai otrādi. Tikai skaitļi 1 un 3 katrs piedalās trijās summās, pārējie skaitļi piedalās katrs tieši divās summās – tas nozīmē, ka virkni var izveidot viennozīmīgi (*pamato, kāpēc virknē nevar secīgi iekļaut skaitļus 1 un 3!*):

17, 8, 1, 15, 10, 6, 3, 13, 12, 4, 5, 11, 14, 2, 7, 9, 16

4. Doti naturāli skaitļi no 1 līdz 10. Tiem aprēķinātas katru divu blakus esošo skaitļu summas. Vai vari dotos skaitļus sakārtot virknē tā, lai minētās blakus esošo skaitļu summas būtu visi skaitļi no 7 līdz 15? Izveido vismaz divas dažādas virknes!

Atrisinājums. Visu skaitļu no 7 līdz 15 skaitļu kopējā summa ir 99. Katrs virknes skaitlis šajā summā ietilpst divas reizes, izņemot pirmo skaitli a un pēdējo skaitli b . Skaitļu no 1 līdz 10 kopējā summa $S = 55$. No šejienes seko

$$2S - a - b = 99$$

$$a + b = 110 - 99 = 11$$

Virknes pirmā un pēdējā skaitļu summai ir jābūt 11. Tad šie skaitļi var būt (5; 6), (7; 4), (8; 3), (9; 2), (10; 1).

Virknes var izveidot, piemēram, šādas:

$$1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9, 5, 10$$

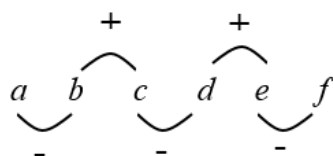
$$3, 9, 4, 10, 5, 6, 1, 7, 2, 8$$

Komentārs. Ievērosim, ka abi piemēri izveidoti, ievērojot zināmu skaitļu ciklisku kārtību. Pirmajā virknē katru divu skaitļu summas ir visi skaitļi no 7 līdz 15 pēc kārtas. Arī otrajā virknē ir ievērota zināma skaitļu secība (pirmo piecu skaitļu cikliskā kārtība ir izvietota nepāra pozīcijās - 3, 4, 5, 1, 2). Rodas jautājums, vai iespējams konstruēt tādus piemērus, kur skaitļi izvietoti bez cikliskas kārtības. Jā, to var izdarīt, piemēram:

$$1, 6, 8, 4, 9, 2, 7, 3, 5, 10$$

5. Virknē patvaļīgā secībā ir uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 6. Veic sekojošus aprēķinus: summē otro skaitli ar trešo; ceturto skaitli ar piekto; aprēķina starpības pirmajam un otrajam skaitlim; trešajam un ceturtajam; piektajam un sestajam skaitlim no lielākā skaitļa atņemot mazāko. Vai iespējams dotos sešus skaitļus izvietot virknē tā, lai rezultātā iegūtu visus dažādus skaitļus no 1 līdz 5? Varbūt no 3 līdz 7? Kādu secīgu skaitļu virkni var iegūt kā rezultātu?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka dotos skaitļus ir izdevies izvietot:



Skaitļu summas $b + c$ un $d + e$ un starpības $|a - b|$; $|c - d|$; $|e - f|$ pieņem vērtības 1, 2, 3, 4 un 5 kaut kādā secībā. Apskatīsim visas iespējas, kā var iegūt skaitļus 1, 2, 3, 4, 5:

$$5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 6 - 1$$

$$4 = 1 + 3 = 6 - 2 = 5 - 1$$

$$3 = 1 + 2 = 6 - 3 = 5 - 2 = 4 - 1$$

$$2 = 6 - 4 = 5 - 3 = 4 - 2 = 3 - 1$$

$$1 = 6 - 5 = 5 - 4 = 4 - 3 = 3 - 2 = 2 - 1$$

Kā summu var iegūt tikai skaitļus 3 un 4 (vienā veidā), un 5. Aplūkojot šīs summas secinām, ka divas dažādas summas $b + c$ un $d + e$ no četriem dažādiem skaitļiem nevar iegūt.

Otrs gadījums. Ja kā rezultātu ir jāiegūst visus skaitļus no 3 līdz 7, tad apskatīsim trīs dažādās starpības $|a - b|$, $|c - d|$ un $|e - f|$ no visiem dotajiem skaitļiem, kuras ir dažādi skaitļi. Kā starpību var iegūt tikai skaitļus 3, 4 un 5:

$$5 = 6 - 1$$

$$4 = 6 - 2 = 5 - 1$$

$$3 = 6 - 3 = 5 - 2 = 4 - 1$$

Kā redzam, trīs dažādas starpības no visiem sešiem dažādiem skaitļiem iegūt nevar.

Vai vispār var iegūt secīgu skaitļu virkni kā minēto darbību rezultātu? Jā, var iegūt visus skaitļus no 2 līdz 6:

$$6, 2, 3, 5, 1, 4$$

$$\text{Te } 6 - 2 = 4; 2 + 3 = 5; 5 - 3 = 2; 5 + 1 = 6; 4 - 1 = 3$$