Punktiņš. (B grupa) Pelīte un siers

11.10.2019

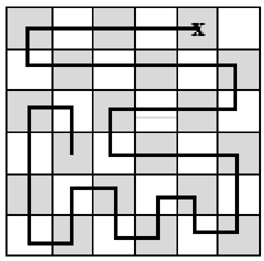
Īsi atrisinājumi un komentāri

1. Pelīte dzīvo pagrabā, kurā ir 6 x 6 kambari, kur starp katriem diviem blakus esošiem kambariem ir durvis. Kāds ir garākais ceļš no pelītes kambara līdz kambarim, kur glabājas siers, ja viņa jebkurā kambarī ieies ne vairāk kā vienu reizi? Uzzīmē šādu ceļu un pamato, ka tas ir garākais iespējamais ceļš!

				x	
	P				

Atrisinājums.

Iekrāsosim rūtiņu kvadrātu kā šaha dēlīti un konstruēsim kādu garākā ceļa piemēru:



Ceļš secīgi iet caur melnu – baltu – melnu – baltu - … rūtiņām un beidzas atkal ar melnu rūtiņu. Kopumā ceļā ir 18 melnas rūtiņas un tikai 17 baltas, jo ceļš sākas un beidzas ar melnajām rūtiņām. Tāpēc kaut kāda balta rūtiņa šajā ceļā netiks iekļauta. Garākais ceļš satur 34 soļus jeb pelīte izies caur 34 durvīm.

2. Kāds ir īsākais ceļš no kambara, kur atrodas pelīte līdz kambarim, kurā ir siers (skat. 1. uzdevuma attēlu)? Cik ir tādu īsāko ceļu?

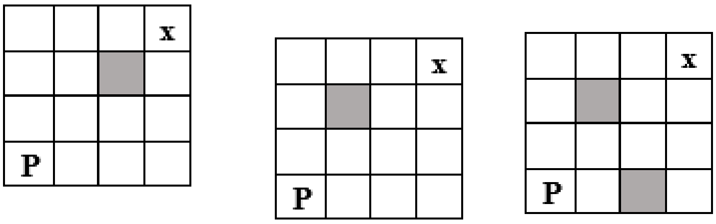
Atrisinājums. Pelīte visātrāk sasniegs siera kambari, ja pēc dotās kartes virzīsies tikai pa labi un uz augšu. Noteiksim dažādo ceļu skaitu, pa kuriem pelīte var nokļūt kādā no kambariem. Skatoties pēc kartes, kādā kambarī jeb rūtiņā viņa var iekļūt vai nu no apakšējās rūtiņas, vai no rūtiņas pa kreisi. Tāpēc ceļu skaits, pa kuriem var nokļūt kādā rūtiņā, ir summa no ceļu skaita minētajās blakus rūtiņās (kreisajā un apakšējā).

Katrā rūtiņā ierakstīsim ceļu skaitu, kā tur var nokļūt:

	1	4	10	**20**	
	1	3	6	10	
	1	2	3	4	
	P	1	1	1	

Pavisam ir 20 dažādi ceļi, kā pelīte visātrāk var nokļūt pie siera.

3. Iezīmētais kambaris ir aizslēgts, pelīte tajā iekļūt nevar. Cik tagad ir īsāko ceļu līdz sieram?



Atrisinājums. Pelīte pie siera var atbilstoši nokļūt pa 8; pa 11; pa 7 dažādiem ceļiem:

1	4	4	**8**
1	3		4
1	2	3	4
P	1	1	1

1	1	4	**11**
1		3	7
1	2	3	4
P	1	1	1

1	1	3	7
1		2	4
1	2	2	2
P	1		

4. Pie ieejas pagrabā ir 6 pakāpieni. Pelīte ir izdomājusi šādu rotaļu – uzlekt pa pakāpieniem dažādos veidos – vai nu uzlecot uz katra pakāpiena pēc kārtas, vai pārlecot uzreiz visiem pakāpieniem pāri, vai arī citādi. Cik veidos pelīte var uzlekt pa šiem 6 pakāpieniem?

Atrisinājums. Pelītes pēdējais lēciens vienmēr ir uz sesto pakāpienu. Uz katra no pirmajiem pieciem pakāpieniem viņa var uzlekt vai neuzlekt. Ir divi varianti, vai pelīte uz kāda pakāpiena uzleks vai neuzleks, tie kombinējas savā starpā. Tāpēc dažādo lēcienu variantu skaitu var aprēķināt sekojoši:

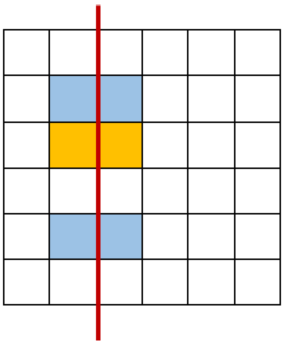
$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

Ir 32 dažādi veido, kā pelīte var uzlekt augšā.

5. (*) Pelītei ir pagraba karte – kvadrāts ar 6 x 6 rūtiņām. Viņa noklāj karti ar atbilstoša izmēra domino kauliņiem (domino noklāj tieši 2 rūtiņas, visas rūtiņas pārklātas, domino nekur nepārklājas). Pelīte pamanīja, ka lai arī kā viņa izvieto domino kauliņus, uz kartes vienmēr paliek vismaz viena taisna līnija no vienas kartes malas līdz otrai, kas nav pārklāta ne ar vienu domino kauliņu. Paskaidro, kāpēc tā ir!

Atrisinājums. Pelīte var noklāt karti ar 18 domino kauliņiem. Apskatīsim taišņu nogriežņus, jeb līnijas, kas sadala karti rūtiņās - ir 5 vertikālas un 5 horizontālas līnijas. Pieņemsim, ka ir tāds pārklājums, kurā ir atrodama līnija, kuru pārklāj nepāra skaits domino kauliņu.

Piemēram:



Piemērā otrā vertikālā līnija ir pārklāta ar 3 domino.

Līnija, kura pārklāta ar nepāra skaitu domino, sadala kvadrātu divās daļās, kur katrā daļā ir pāra skaits rūtiņu. Nepāra skaita domino uz šīs līnijas katrā no daļām pārklāj nepāra skaitu rūtiņu. Atlikušās rūtiņas katrā daļā arī ir nepāra skaitā – tās nevar pilnībā pārklāt ar domino, jo katrs domino pārklāj tieši divas rūtiņas.

Tāpēc nav tādas līnijas, kuru pārklāj nepāra skaits domino. Katru vertikālo vai horizontālo līniju pārklāj 2 vai 4, vai 6 , vai neviens domino.

Pieņemsim, ka katra līnija pārklāta vismaz ar diviem domino kauliņiem. Ir 10 līnijas, kuru pārklāšanai ir nepieciešami vismaz 20 domino kauliņi, bet kvadrātu var pārklāt ar 18 kauliņiem. Tātad pieņēmums ir nepareizs – ir vismaz viena taisna līnija, kas nav pārklāta ar domino kauliņiem.

(*) Uzdevums no grāmatas: Andras Szilard. Elementary combinatorial geometry. GIL Publishing House, 2007