Punktiņš. (B grupa) Skaitļa pieraksts

18.10.2019

Īsi atrisinājumi un komentāri.

1. Desmitciparu skaitļi ir sastādīti tikai no cipariem 1, 2, 3. Cik starp tiem ir tādu skaitļu, kur katri divi blakusesošie cipari atšķiras par 1?

Atrisinājums. Skaitlī blakus var atrasties cipari 1 un 2 vai cipari 2 un 3. Tāpēc skaitļa nepāra pozīcijās ir visi cipari 2 vai arī cipari 2 izvietoti pāra pozīcijās. Starp cipariem 2 atliek 5 brīvas pozīcijas, kurās izvieto ciparus 1 un 3. Katrā no piecām pozīcijām var atrasties vai nu cipars 1, vai 3. Kopumā tie ir 32 varianti. Vadoties no ciparu 2 izvietojuma, variantu skaits ir 64. Ja pieņemam, ka katrā skaitlī ir vismaz viens cipars 1 un vismaz viens cipars 3, tad meklēto skaitļu skaits ir 62.

2. Katrā kvadrāta 2 x 2 rūtiņā ir ierakstīts viens no skaitļiem no 1 līdz 9. Tā ieguva četrus divciparu skaitļus, kurus saskaitīja 52 + 19 + 51 + 29 = 151. Kādus skaitļus jāieraksta rūtiņās, lai to divciparu skaitļu summa būtu 100?

5	2
1	9

Atrisinājums. Kvadrātā izvietotos ciparus apzīmēsim *a, b, c, d*:

a	b
c	d

No šim cipariem izveido divciparu skaitļus, kurus summē:

$$\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ac} + \overline{bd}$$

Izvēršot darbības decimālajā pierakstā, mums ir jāatrisina sekojošais vienādojums:

$$10a + b + 10c + d + 10a + c + 10b + d = 100$$

Saīsinot

$$20a + 11(b + c) + 2d = 100$$

Ievērosim, ka summa $b + c$ ir pāra skaitlis, kas var pieņemt vērtības 2; 4; 6; 8. Lielāka par 8 šī summa nevar būt, jo tad kreisās puses izteiksme būtu lielāka par 100. Arī ar 8 šī izteiksme nevar būt vienāda, jo tad

$$20a + 2d > 100 - 88 = 12$$

Pieņemsim, ka $b + c = 2$, tad $b = c = 1$ tad

$$20a + 2d = 78 \quad jeb \quad 10\,a + d \ = \ 39$$

Tad $a = 3$ un $d = 9$.

Līdzīgi apskata pārējos gadījumus, kad summa $b + c$ ir 4 vai 6.

Kopumā ir 9 dažādas atbildes:

3	1		1	1		1	5		1	2		1	4
1	9		5	7		1	7		4	7		2	7

1	3		2	1		2	3		2	2
3	7		3	8		1	8		2	8

3. Atrisini ABC + AB + C = 300!

Atrisinājums. Pierakstīsim doto izteiksmi decimālajā pierakstā un vienkāršosim to

$$100A + 10B + C + 10A + B + C = 300$$

$$110A + 11B + 2C = 300$$

Cipars *A* nevar būt 3 vai lielāks, jo tad vienādības kreisā puse būtu lielāka par 300. Tāpēc *A* ir 1 vai 2.

Ja *A* = 1, tad $11B + C = 190.$

Bet lielākā iespējamā *11B* + *C* summa nepārsniedz 108 (108 = 99 + 9).

Ja *A* = 2, tad $11B + C = 80$. Ievērojam, ka B ir pāra skaitlis (skat. iepriekšējo vienādojumu ar A, B, C), bet *C* ir viencipara skaitlis. Te ir tikai viens atrisinājums *B* = 6, bet *C* = 7. Skaitlis *ABC* = 267.

4. Atrisini ABC = AB + BC + CA!

Atrisinājums. Risina līdzīgi kā iepriekšējo uzdevumu:

$$100A + 10B + C = 10A + B + 10B + C + 10C + A$$

$$89A = 10C + B$$

Seko *A* = 1, *B* = 9, *C* = 8

5. Atrodi 4 dažādus ciparus, lai AB + CD = DC + BA! Kāds ir vispārīgs likums, lai šādu piemēru sastādītu?

Atrisinājums. Sastādām vienādojumu

$$10A + B + 10C + D = 10D + C + 10B + A$$

$$9A + 9C = 9D + 9B$$

$$A + C = D + B$$

Te var būt dažādi atrisinājumi. Vismazākā iespējamā skaitļu summa var būt 5, tad četri dažādie cipari ir 1, 4, 2 un 3. Vislielākā skaitļu summa var būt 15, tad cipari A, B, C, D var būt 7, 8, 9, 6. Ir iespējami arī citi atrisinājumi, kur kādu skaitli no 5 līdz 15 var izteikt kā divu viencipara skaitļu summu divos dažādos veidos.

6. Jana, Ina un Andris katrs paņēma vienu kartiņu ar naturālu skaitli, visi skaitļi uz kartiņām bija dažādi. Izrādījās, ka Janas un Inas skaitļu summa ir kvadrāts, arī Janas un Andra skaitļu summa bija kvadrāts, bet Inas un Andra skaitļu summa nebija kvadrāts. Inas un Andra skaitļu summa bija vienāda ar skaitli, ko iegūst kādu kvadrātu palielinot par 5, un vienāda ar skaitli, ko iegūst kādu kvadrātu pamazinot par 6. Kādi bija skaitļi uz bērnu kartiņām?

Atrisinājums. Tikai divu skaitļu kvadrātu starpība ir 11 – tie ir skaitļi 36 un 25.

Pieņemsim, ka bērnu izvēlētie skaitļi ir a, b un c. Tad $a + b = k^2$ ir kāda skaitļa kvadrāts un arī $a + c = t^2$ ir kāda skaitļa kvadrāts, bet $b + c = 30$.

Aplūkosim vairākas šī gadījuma īpašības.

$b + c$ ir pārskaitlis, tāpēc skaitļiem b un c ir vienāda paritāte.

Atņemot vienādojumus $a + b = k^2$ un $a + c = t^2$ vienu no otra iegūsim

$$b - c = k^2 - t^2 \quad \text{jeb} \quad (k - t)(k + t) = b - c$$

Ievērojot, ka skaitļiem b un c ir vienāda paritāte, starpība $b - c$ ir pārskaitlis.

Reizinātāji $(k - t)$ un $(k + t)$ ir dažādi skaitļi un tiem arī ir vienāda paritāte – abi ir pārskaitļi.

Katra no skaitļiem k un t kvadrāti ir divu naturālu skaitļu summa, tāpēc ne k, ne t nevar būt vienāds ar 1.

Izveidosim tabulu, ievērojot, ka b un c summa ir 30 un b nav vienāds ar c, atzīmēsim, kādos reizinātājos var sadalīt starpību b - c:

b	c	$b - c$	reizinātāji
29	1	28	$2 \cdot 14 = 4 \cdot 7$
28	2	26	$2 \cdot 13$
27	3	24	$2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$
26	4	22	$2 \cdot 11$
25	5	20	$2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$
24	6	18	$2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$
23	7	16	$2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$
22	8	14	$2 \cdot 7$
21	9	12	$2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$
20	10	10	$2 \cdot 5$
19	11	8	$2 \cdot 4$
18	12	6	$2 \cdot 3$
17	13	4	$2 \cdot 2$
16	14	2	$2 \cdot 1$

Saskaņā ar šīs tabulas pirmo rindu

$$b - c = 2 \cdot 14 \quad \text{jeb} \quad (k - t)(k + t) = 2 \cdot 14$$

Iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} k - t = 2 \\ k + t = 14 \end{cases}$$

Saskaitot vienādojumus, iegūst $2k = 16$ un $k = 8$, tad $t = 6$. Seko

$a + b = k^2$ jeb $a + 29 = 64$ un

$a + c = t^2$ jeb $a + 1 = 36$.

Bērni varēja izvilkt kartiņas

$a = 35$; $b = 29$; $c = 1$

Līdzīgi aplūko pārējos gadījumus. (Tabulā iekrāsotie reizinājumi neder.)

Vēl ir divi atrisinājumi:

$a = 11$; $b = 25$; $c = 5$

$a = 2$; $b = 23$; $c = 7$