Mājasdarbs senioru grupai uz 19.10.2019.

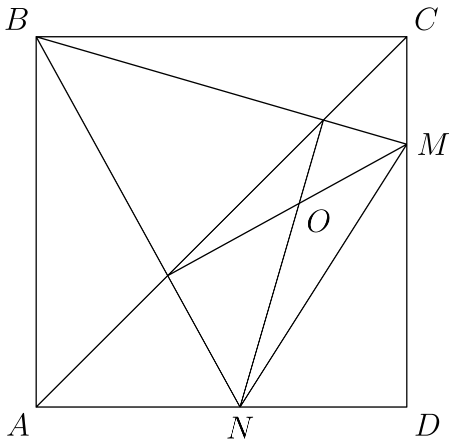
Norādījumi: risinājumus sūtīt uz jevgenijs.vihrovs@lu.lv līdz 19.10. 11:00 (vēlams līdz 18.10. vakaram). Pat ja uzdevums netiek atrisināts pilnībā, pierakstīt iegūtos rezultātus.

Iesildīšanas uzdevumi ģeometrijā

1. uzdevums. Šaurleņķu trijstūrī ABC nogriežņi AA_1 un BB_1 ir augstumi, H ir augstumu krustpunkts, punkti M, N un K ir attiecīgi nogriežņu AB, AH un BH viduspunkti. Pierādīt, ka $\angle MKA_1 = \angle B_1NM$.

2. uzdevums. Stars t ir $\triangle ABC$ leņķa A bisektrise. Tā krusto malu BC punktā K. Punkti M un N ir to perpendikulu pamati, kas no B un C vilkti pret t (M un N nesakrīt). Tā perpendikula pamats, kas no K vilkts pret AC, ir S. Pierādīt, ka $\angle NSK = \angle MSK$.

3. uzdevums. Dots, ka $ABCD$ — kvadrāts un $\angle MBN = 45°$ (skat. zīm.). Pierādīt, ka $BO \perp MN$.



4. uzdevums. Šaurleņķu trijstūrī ABC nogriežņi BQ un CP ir augstumi. Caur punktiem A, P un Q ir novilkta riņķa līnija ω. No punkta Q pret taisni AB vilktais perpendikuls krusto riņķa līniju ω punktā T. Zināms, ka TB ir ω pieskare un $AT = TB$. Pierādīt, ka $AB = AC$.

Pamatdaļas uzdevumi

5. uzdevums. α ir patvaļīgs pozitīvs reāls skaitlis. Šim skaitlim α noteikt vislielāko tādu reālu skaitli C, ka nevienādība

$$\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{y^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{z^2}\right) \geq C\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+2\right)$$

izpildās visiem pozitīviem reāliem x, y un z, kas apmierina $xy+yz+zx=\alpha$. Kuros gadījumos izpildās vienādība?

6. uzdevums. Trīsstūra ABC ievilktās riņķa līnijas centrs ir I. Ievilktā riņķa līnija pieskarās malām BC un AC punktos D un E, attiecīgi. Taisnes AI un DE krustojas punktā P, un malu BC un AB viduspunkti ir M un N, attiecīgi. Pierādīt, ka punkti M, N un P atrodas uz vienas taisnes.

7. uzdevums. Alise un Bobs veido skaitli ar 2018 cipariem, rakstot ciparus no kreisās puses uz labo. Alise sāk un viņi alternē gājienus, katrā uzrakstot vienu ciparu. Katram nākamajam ciparam ir jādod citādāks atlikums, dalot ar 3, nekā ir iepriekšējam. Vai Alise vienmēr var nospēlēt tā, ka gala skaitlis nedalās ar 3?

8. uzdevums. Nodefinēsim naturālo skaitļu kopu M ar šādām īpašībām:

1. $2018 \in M$.
2. Ja $m \in M$, tad visi m pozitīvie dalītaji arī pieder M.
3. Visiem $k, m \in M$ ar $1 < k < m$ skaitlis $km+1$ arī pieder M.

Pierādīt, ka $M = \mathbb{N}$ (visu naturālo skaitļu kopa).