# Periodiskas virknes

**1.** Uz tāfeles uzrakstīts skaitlis 61. Katru minūti skaitli nodzēš un tā vietā uzraksta tā ciparu reizinājumu, kam pieskaitīts 13. Kāds skaitlis būs uzrakstīts uz tāfeles pēc stundas?

**2.** Dota virkne $a_1, a_2, \ldots$, kurai visiem $n \geq 2$ izpildās $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$. Atrodiet $a_{100}$, ja $a_1 = 3$ un $a_2 = 7$.

**3.** Atrast skaitļa $2^{50}$ pēdējo ciparu.

**4.** Pierādīt, ka atlikumu virkne, ko iegūst $F_i$ dalot ar 2019 ir

1. periodiska, sākot no kādas vietas
2. periodiska

Šeit $F_1, F_2, \ldots$ ir Fibonači virkne, $F_1 = F_2 = 1$ un $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ visiem naturāliem $n$.

**5.** Virknei $\{a_n\}$ ir spēkā sakarība $a_n = n^2$, ja $1 \leq n \leq 5$, un visiem naturāliem $n$ izpildās $a_{n+5} + a_{n+1} = a_{n+4} + a_n$. Aprēķiniet $a_{2019}$.

**6.** Dota augoša naturālu skaitļu virkne $a_1, a_2, \ldots$, kurā visiem naturāliem $n$ izpildās $a_{n+1} \leq 10a_n$. Pierādīt, ka daļa $0, a_1a_2\ldots$, ko iegūst, sarakstot šos skaitļus vienu aiz otra rindā, ir neperiodiska.

**7.** Divu virkņu mazākie periodi ir attiecīgi 7 un 13. Kāds lielākais sākotnējais gabals tām var sakrist?

**8.** Doti naturāli skaitļi $a$ un $b$, zināms, ka $a$ ir nepāra. Virkni $\{u_n\}$ definē šādi: $u_1 = b$ un visiem naturāliem $n$

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}u_n, & \text{ja } u_n \text{ ir pāra} \\ u_n + a, & \text{ja } u_n \text{ ir nepāra} \end{cases}$$

1. Pierādīt, ka kādam $n \in \mathbb{N}$ izpildīsies $u_n \leq a$.
2. Pierādīt, ka $u_n$ sākot no kādas vietas būs periodiska

**9.** Dota virkne $a_1, a_2, \ldots$ un zināms, ka katram $k$ var atrast tādu $t$, ka

$$a_k = a_{k+t} = a_{k+2t} = a_{k+3t} = \ldots.$$

Vai šī virkne noteikti ir periodiska?

**10.** Skaitļa $1^1 + 2^2 + \cdots + n^n$ pēdējais cipars ir $b_n$. Pierādīt, ka virkne $\{b_n\}$ ir periodiska un atrast tās mazāko periodu.

**11.** Katram naturālam skaitlim $n$ ar $a_n$ apzīmēsim skaitļa $n^{n^n}$ pēdējo ciparu. Pierādīt, ka virkne $\{a_n\}$ ir periodiska un atrast tās mazāko periodu.

**12.** Dota naturālu skaitļu virkne $a_1, a_2, \ldots$, zināms, ka $a_{n+2}$ ir skaitļa $a_{n+1}^2 + a_n$ pēdējais cipars visiem naturāliem $n$. Vai šī virkne noteikti sākot no kādas vietas ir periodiska?

**13.** Virkni $0110100110010110\ldots$ iegūst šādi: sākumā uzraksta ciparu 0 un tad katrā solī jau esošajai virknei pieraksta galā tās ”invertētu kopiju”, t.i. tāda pat garuma virkni, kurā visas nulles aizstātas ar vieniniekiem un otrādi. Vai iegūtā virkne sākot no kādas vietas ir periodiska?

**14.** Naturālam skaitlim katru sekundi pieskaita vai nu 54 vai 77. Pierādīt, ka kādā brīdī tā pēdējie divi cipari būs vienādi.

## Periodiskas funkcijas

**15.** Funkcijai $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ piemīt īpašība, ka kādam $\omega$ visiem $x \in \mathbb{R}$ izpildās

$$f(x+\omega) = \frac{f(x)-5}{f(x)-3}.$$

Pierādīt, ka $f$ ir periodiska.

**16.** Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir periodiska, un virkne $\{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$ satur bezgalīgi daudz dažādus locekļus. Pierādīt, ka $f$ periods ir iracionāls.

**17.** Funkcijai $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ visiem $x, y \in \mathbb{R}$ izpildās

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y),$$

un zināms, ka eksistē tāds $x_0$, ka $f(x_0) = -1$. Pierādīt, ka $f$ ir periodiska.

**18.** Funkcijai $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kādam $a$ visiem $x \in \mathbb{R}$ izpildās

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}.$$

Pierādīt, ka $f$ ir periodiska, un dot piemēru šādai funkcijai, ja $a = 1$.

**19.** Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir ierobežota un visiem $x \in \mathbb{R}$ izpildās

$$f(x + \frac{13}{42}) + f(x) = f(x + \frac{1}{6}) + f(x + \frac{1}{7}).$$

Pierādīt, ka $f$ ir periodiska.

## Uzdevumi

**20.** Kādiem naturāliem $n \geq 3$ var atrast tādus reālus skaitļus $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, ka $a_1 = a_{n+1}$, $a_2 = a_{n+2}$ un visiem $1 \leq i \leq n$ ir spēkā

$$a_{i+2} = a_i a_{i+1} + 1?$$

**21.** Dota bezgalīga naturālu skaitļu virkne $a_1, a_2, \ldots$. Zināms, ka eksistē tāds naturāls $N$, ka visiem $n > N$ vērtība

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

ir naturāls skaitlis. Pierādīt, ka eksistē tāds naturāls skaitlis $M$, ka $a_n = a_{n+1}$ visiem $n > M$.

**22.** Katram veselam skaitlim $a_0$ aplūkosim virkni $a_0, a_1, a_2, \ldots$, kurā visiem naturāliem $n$

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{ja } \sqrt{a_n} \text{ ir naturāls skaitlis} \\ a_n + 3, & \text{ja } \sqrt{a_n} \text{ nav naturāls skaitlis} \end{cases}.$$

Atrodiet visas $a_0$ vērtības, kurām eksistē tāds skaitlis $A$, ka $a_n = A$ bezgalīgi daudzām $n$ vērtībām.