

Mājasdarbs senioru grupai uz 16.11.2019.

Norādījumi: risinājumus sūtīt uz jevgenijs.vihrovs@lu.lv līdz 16.11. 11:00 (vēlams līdz 15.11. vakaram). Pat ja uzdevums netiek atrisināts pilnībā, pierakstīt iegūtos rezultātus. **Ieteicams izlasīt visus uzdevumus, jo nodarbībā tos analizēsim!!!** Katrs uzdevums tiek vērtēts līdz 7 punktiem (bet kopējais rezultāts tiek vēlāk normēts uz 10, tad galā par katru uzdevumu var nopelnīt līdz 1.25 punktiem).

Iesildīšanas uzdevumi ģeometrijā

1. uzdevums. Punkti A , B un C atrodas uz vienas taisnes; B atrodas starp A un C . Trijstūri AMB un BNC ir vienādmalu. Pierādiet, ka $AN = CM$.

2. uzdevums. Trijstūris ABC ir regulārs. Tam apvilka riņķa līnija. Uz loka BC , kas nesatur virsotni A , ņemts punkts M . Pierādīt, ka $MA = MB + MC$.

3. uzdevums. Riņķa līnijas ω_1 diametram AB pieskaras otra riņķa līnija ω_2 , kuras centrs atrodas uz ω_1 . Pierādīt: pieskares, kas no A un B vilktas riņķa līnijai ω_2 un kas nesakrīt ar AB , ir paralēlas savā starpā.

4. uzdevums. Dots, ka ABC — šaurleņķu trijstūris, bet $BEFC$ un $ACMN$ — kvadrāti, kas konstruēti ārpus $\triangle ABC$. Taisne t_1 iet caur B un ir perpendikulāra AE ; taisne t_2 iet caur A un ir perpendikulāra BN ; taisne t_3 iet caur C un ir perpendikulāra AB . Pierādīt, ka t_1 , t_2 un t_3 krustojas vienā punktā.

Pamatdaļas uzdevumi

5. uzdevums. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab},$$

kur a, b ir pozitīvi reāli skaitļi tādi, ka $a + b < 2$. Kādām a, b vērtībām izpildās vienādība?

6. uzdevums. Dota riņķa līnija k ar rādiusu r , kur AB ir tās horda, pie tam $AB > r$. Apzīmējam ar S tādu punktu uz AB , ka $AS = r$. Nogriežņa BS vidusperpendikuls krusto k punktus C un D . Taisne, kas iet caur D un S , krusto k otro reizi punktā E . Pierādīt, ka trīsstūris CSE ir vienādsānu.

7. uzdevums. Skaitlis $n \geq 3$ ir naturāls. Izrēķiniet, cik ir tādu kopas $\{1, 2, \dots, n\}$ apakškopu no trīs elementiem, ka viens no tiem ir pārējo divu vidējais.

8. uzdevums. Apzīmēsim ar $d(n)$ skaitļa $n \geq 2$ visu pozitīvo dalītāju skaitu. Atrast visus tādus naturālus skaitļus $n \geq 3$, kuriem ir spēkā $d(n-1) + d(n) + d(n+1) \leq 8$.