

Mājasdarbs skaitļu teorijā senioriem uz 14.12.2019.

Risinājumi jāiesniedz rakstiski pirms nodarbības vai nodarbības laikā. Par katru vieglu uzdevumu ir 1 punkts, par katru vidēju uzdevumu ir 2 punkti, bet vairāk par 10 punktiem kopā dabūt nevar. Punktus var arī dabūt, stāstot risinājumu auditorijas priekšā nodarbības laikā.

Viegli uzdevumi:

1. Atrast visus tādus naturālus A , ka skaitļa A^2 pēdējie četri cipari ir vienādi?
2. Kādiem pirmskaitļiem p skaitlis $p^4 - 5p^2 + 4$ nedalās ar 120?
3. Vai eksistē tāds naturāls n , ka skaitlis $(4n + 1)(n + 1)$ ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts?
4. Vai eksistē tāds naturāls n , ka skaitlis $(n^2 + 3)(n + 2)$ ir kāda naturāla skaitļa kubs?
5. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi x un y , ka skaitlis $\sqrt{2x^2 + 20y^2}$ arī ir naturāls?
6. Vai vienādojumam $a^2 + b^2 = 3ab$ eksistē atrisinājumi veselos skaitļos?
7. Dots, ka a, b, c, d ir naturāli skaitļi, un skaitlis $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ dalās ar 5. Pierādīt, ka reizinājums $abcd$ dalās ar 625.

Vidēji uzdevumi:

1. Doti 3 naturāli skaitļi $m \neq n$ un $a > 1$. Pierādiet, ka, ja visi skaitļa $a^m - 1$ pirmreizinātāji ir arī visi skaitļa $a^n - 1$ pirmreizinātāji, tad skaitlis $a + 1$ ir divnieka pakāpe. (**grūts uzdevums**)
2. Noteikt visas naturālas a vērtības, kurām eksistē tāds naturāls n , ka skaitlis $\frac{2^n + 1}{2^a - 1}$ ir vesels.
3. Pierādiet, ka ir bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu, kas nav izsakāmi kā 14 naturālo skaitļu ceturto pakāpju summa.
4. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi m un n , ka skaitlis $5m^2 + 6mn + 7n^2$ ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts?
5. Uz tāfeles ir uzrakstīts skaitlis 2019. Ziemassvētku rūķītis izklaidējas, spēlējot šādu spēli: vienā gājienā viņš tāfelē esošajam skaitlim pieraksta pa labi vienu ciparu. Vai jebkuram naturālām n var gadīties, ka
 - pirmajā gājienā iegūtais skaitlis dalās ar pirmo pirmskaitli jeb 2
 - otrajā gājienā iegūtais skaitlis dalās ar otro pirmskaitli jeb 3,
 - trešajā gājienā iegūtais skaitlis dalās ar trešo pirmskaitli jeb 5,
 - ceturtajā gājienā iegūtais skaitlis dalās ar ceturto pirmskaitli jeb 7,
 - ...,
 - n -tajā gājienā iegūtais skaitlis dalās ar n -to pirmskaitli.