

Mājas darbs uz izlases kandidātu vecākās grupas nodarbību 2020. gada 25. janvārī

Lūdzu uzrakstīt un iesniegt atrisinājumus (elektroniski pirms nodarbības vai uz papīra nodarbības sākumā), lai cik uzdevumus jums izdotos atrisināt (arī tad, ja tikai vienu).

Ja, risinot uzdevumus, rodas grūtības vai jautājumi, ar kuriem paši netiekat galā, lūdzu rakstīt e-vēstuli uz adresi “juris punkts smotrovs @ lu punkts lv” vai izrunāt neskaidrības pašas nodarbības laikā.

1. Polinoms $f(x)$ ir tāds, ka vienādojumam $f(x) = x$ nav reālu atrisinājumu. Pierādīt, ka arī vienādojumam $f(f(x)) = x$ nav reālu atrisinājumu.

2. Dots polinoms $P(x, y) = 4 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2$.

a) Atrast mazāko vērtību, kuru var pieņemt šis polinoms.

b) Pierādīt, ka šo polinomu nevar izteikt kā polinomu no x, y kvadrātu summu.

3. Polinomam

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_{k+1}x^{k+1} + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1x + a_0$$

ir n dažādas reālas saknes. Pierādīt, ka $a_{k-1}a_{k+1} < 0$.

4. Vai pastāv tādi polinomi $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ no mainīgajiem x, y, z , ka visām reālām x, y, z vērtībām izpildās sekojošā vienādojuma (2 gadījumi):

a)

$$(x - y + 1)^3 P(x, y, z) + (y - z + 1)^3 Q(x, y, z) + (z - 2x + 1)^3 R(x, y, z) = 1?$$

b)

$$(x - y + 1)^3 P(x, y, z) + (y - z + 1)^3 Q(x, y, z) + (z - x + 1)^3 R(x, y, z) = 1?$$

5. Aplūkosim viena mainīgā x polinomus ar vecāko koeficientu 1. Teiksim, ka divi tādi polinomi $P(x)$ un $Q(x)$ komutē, ja izpildās identitāte $P(Q(x)) = Q(P(x))$.

- a) Katram reālam α atrodiet visus polinomus $Q(x)$, kuru pakāpe nepārsniedz 3 un kas komutē ar polinomu $P(x) = x^2 + \alpha$.
- b) Katram polinomam $R(x)$ un katram skaitlim a definēsim polinomu $R^{(a)}(x) = R(x - a) + a$. Pierādīt, ka polinomi $P(x)$ un $Q(x)$ komutē tad un tikai tad, ja komutē polinomi $P^{(a)}(x)$ un $Q^{(a)}(x)$.
- c) Teiksim, ka polinoms $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ ir reducēts, ja $a_{n-1} = 0$. Pierādīt: ja $P(x)$ un $Q(x)$ komutē, tad pastāv tāds a un tādi reducēti polinomi $S(x)$ un $T(x)$, ka $P(x) = S^{(a)}(x)$ un $Q(x) = T^{(a)}(x)$.
- d) Pierādiet, ka pastāv ne vairāk kā viens dotās pakāpes polinoms, kas komutē ar doto otrās pakāpes polinomu.
- e) Pierādiet: ja polinomi $P(x)$ un $Q(x)$ komutē ar vienu un to pašu otrās pakāpes polinomu, tad tie komutē savā starpā.
- f) Atrodiet polinomu ar pakāpi 2^n , kas komutē ar doto otrās pakāpes polinomu $x^2 + bx + c$.
- g) Pierādiet, ka pastāv tāda savstarpēji komutējošu polinomu virkne $P_1(x), P_2(x), \dots, P_k(x), \dots$, ka katra polinoma $P_i(x)$ pakāpe ir i un $P_2(x) = x^2 - 2$. Norāde: ar ko vienāds $P_i(t + t^{-1})$?
- h) Čebiševa pirmā veida polinomus definē ar identitāti $T_k(\cos t) = \cos(kt)$. Pierādīt, ka Čebiševa pirmā veida polinomi komutē un ka $P_k(x) = 2T_k(x/2)$.
- i) Pierādīt rekurento sakarību $P_{k+2}(x) = xP_{k+1}(x) - P_k(x)$.