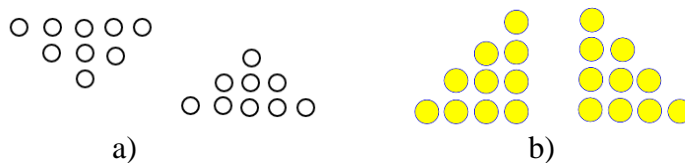


Punktiņš. (B grupa) Podziņas
8.11.2019

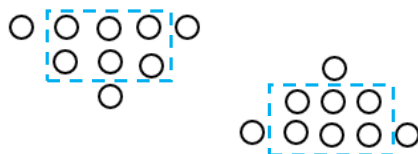
Īsi atrisinājumi un komentāri

1. Doti divi zīmējumi. Katra zīmējuma a) un b) kreisajā trijstūra izvietojumā pārliec 3 kauliņus tā, lai iegūtu izvietojumu, kas redzams labajā trijstūrī.

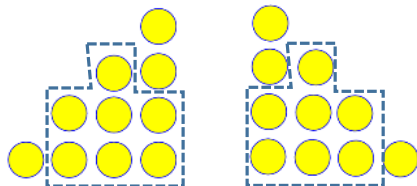


Atrisinājums. Abās konfigurācijās atrodam lielāko kopīgo daļu:

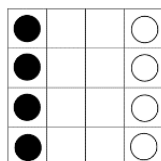
a) Sakrītošā daļa:



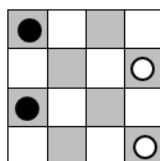
b) Sakrītošā daļa:



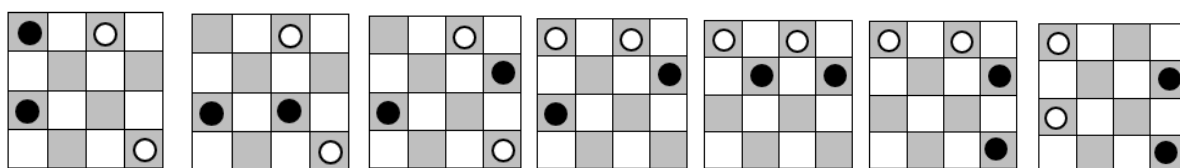
2. Vienā gājienā kauliņu var pārvietot diagonālā virzienā par vienu, divām vai trim rūtiņām. Kauliņu nevar nolikt pozīcijā, kura ir aizņemta. Kauliņi nelec viens otram pāri. Kauliņi netiek kauti. Kāds ir mazākais gājienu skaits, lai melnos un baltos kauliņus samainītu vietām?



Atrisinājums. Ja kvadrāta rūtiņas nokrāso šaha galdiņa veidā, var ievērot, ka 4 kauliņi pārvietojami tikai pa melnajām rūtiņām, bet citi četri - tikai pa baltajām. Tāpēc pietiek aplūkot četrus kauliņu pārvietošanos:

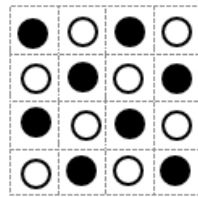


Tikai tas kauliņš, kurš atrodas stūrī, var pārvietoties uz pretējo stūri vienā gājienā. Te ir divi kauliņi pretējos stūros, tāpēc stūri vispirms ir jāatbrīvo, lai tur novietotu pretējās krāsas kauliņu. Tāpēc tikai vienam stūra kauliņam ir iespēja aizņemt pozīciju vienā gājienā. Pārejiem 3 kauliņiem ir jāveic vismaz 2 gājieni katram. Minimālais gājienu skaits līdz ar to ir 7:



Līdzīgā veidā pārvieto kauliņus, kuri ir uz baltajām rūtiņām. Mazākais gājienu skaits ir 14.

3. Kvadrāta formā izvietotas $n \times n$ pogas šaha rakstā. Izvēloties kādu rindu vai kolonu, ir atļauts visām pogām šajā rindā mainīt krāsu uz pretējo. Kāds ir mazākais gājienu skaits, lai iegūtu visas baltas (vai melnas) pogas?



Kā konstruēt atrisinājumu. Ja n ir pāra skaitlis, tad puse ir baltas un puse melnas pogas. Katra no baltajām pogām ir jāpārkrāso vismaz vienu reizi. Krāšosim tā, lai katra baltā poga tiktu pārkrāsota ne vairāk kā vienu reizi. Iesākumā pārkrāsojam katru otro kolonu. Ievērosim, ka vienā gājienā tiek pārkrāsotas tieši $n/2$ baltās pogas. Pārkrāsojot visas minētās kolonas tiek nokrāsota puse no baltajām pogām – visas tās baltās pogas, kuras ir nepāra rindās. Iegūst pogu rindas – melna, balta, melna... Tad krāso katru otro rindu. Katra baltā poga tika nokrāsota tieši vienu reizi, bet katra melnā poga – tieši 2 reizes. Kopumā tika izmantoti n gājieni.

Ja n ir nepāra skaitlis, tad, lai pārkrāsotu baltās pogas, nepieciešami $n - 1$ gājieni. Savukārt, lai pārkrāsotu visas melnās pogas, nepieciešami $n + 1$ gājieni. Rīkojas līdzīgi kā iepriekš.

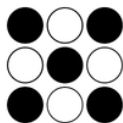
4. Astoņas melnas un astoņas baltas pogas ir izvietotas šaha rakstā kvadrāta veidā. Vai ar trešajā uzdevumā aprakstītajiem gājieniem var iegūt izvietojumu, kur ir tieši viena balta poga?

Atrisinājums. Melno pogu skaits ir pāra skaitlis – astoņas. Apskatīsim visas iespējas, kādas var būt pēc vairākiem gājieniem, tas ir, cik melno pogu var būt vienā rindā: neviena, viena, divas, trīs vai četras. Atzīmēsim, kas notiks šajā rindā pēc pārkrāsošanas:

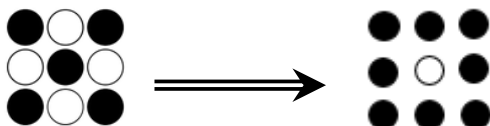
Melno pogu skaits rindā	Melno pogu skaits rindā pēc pārkrāsošanas	Kopīgā melno pogu skaita izmaiņas
0	+ 4	+4
1	-1 + 3	+2
2	-2 + 2	0
3	-3 + 1	-2
4	-4	-4

Te redzams, ka melno pogu skaita izmaiņas notiek tikai par pāra skaitli. Tāpēc no sākotnējā pāra skaitļa skaitli 7 iegūt nevar.

5. Deviņas melnas un baltas pogas ir izvietotas kvadrāta veidā šaha rakstā. Vai ar trešajā uzdevumā aprakstītajiem gājieniem var iegūt izvietojumu, kur ir tieši viena balta poga pašā centrā?



Atrisinājums. No dotās konfigurācijas ir jāiegūst sekojoša:



Atzīmēsim, cik reižu katru no pogām ir jāpārkrāso, lai iegūtu vēlamo situāciju – vai tas būs pāra skaitu reižu (p) vai nepāra skaitu reižu (n):

p	n	p
n	n	n
p	n	p

Apzīmēsim dotās pogas ar burtiem

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Centrālo pogu E var pārkrāsot tikai ar otrās rindas un/vai otrās kolonas palīdzību. Pieņemsim, ka rindas atbilstoši pārkrāso r_1 , r_2 un r_3 reizes, bet kolonas k_1 , k_2 , k_3 reizes. Lai panāktu vēlamu situāciju ir jāizpildās:

$r_2 + k_2$ ir nepāra skaitlis. Pieņemsim, ka k_2 ir nepāra skaitlis, bet r_2 – pāra skaitlis. Tā kā otrajā rindā katru pogu ir jāpārkrāso nepāra skaitu reižu, tad tas nozīmē, ka visi skaitļi k_1 , k_2 un k_3 ir nepāra skaitļi. Savukārt pogas A, C, G un I jāpārkrāso pāra skaitu reižu, tāpēc arī r_1 un r_3 ir nepāra skaitļi. No tā izriet, ka B un H pogas tiks pārkrāsotas pāra skaitu reižu, kas ir pretruna.