Punktiņš. (B Grupa) Skaitļu dalāmības īpašības
10.01.2020

Īsi atrisinājumi un komentāri

Skaitļu dalāmības pazīme ar 7:
Skaitlis dalās ar 7, ja skaitlis, ko iegūst no dotā skaitļa nodzēšot pēdējo ciparu un atņemot no tā dotā skaitļa pēdējo ciparu pareizinātu ar 2, dalās ar 7.

Piemēram, skaitlis 245 dalās ar 7, jo $24 - 2 \cdot 5 = 14 = 2 \cdot 7$

Kā pamatot šo pazīmi? Dots skaitlis $\overline{Ab}$, kura pēdējais cipars ir b, bet tā pirmā daļa A var sastāvēt no vairākiem cipariem. Ir zināms, ka skaitlim piemīt īpašība

$$\bar{A} - 2b = 7n$$

Aplūkosim doto skaitli un pārveidosim to, izmantojot doto īpašību:

$$\overline{Ab} = \bar{A} \cdot 10 + b = (7n + 2b) \cdot 10 + b =$$

$$= 70n + 21b = 7 \cdot (10n + 3b)$$

Redzams, ka dotais skaitlis dalās ar 7.

1. Pārbaudi, vai skaitļi dalās ar 7: 364; 5705; 45031

Atrisinājums.

1) Skaitlis 364 dalās ar 7, jo $36 - 2 \cdot 4 = 28$. Ir izpildīta dalāmības ar 7 īpašība.

2) Skaitlis 5705 dalās ar 7, jo $570 - 2 \cdot 5 = 560$ un skaitlis 560 dalās ar 7.

3) Skaitlis 45031 arī dalās ar 7. To pamato, vairākas reizes pielietojot dalāmības īpašību:

$$4530 - 2 = 4528$$

$$452 - 16 = 436$$

$$43 - 12 = 21$$

Rezultāts 21 dalās ar 7 tāpēc dotais skaitlis 45031 arī dalās ar 7.

2. Vai skaitlis 205527 dalās ar 21?

Atrisinājums. Ja skaitlis dalās ar 21, tad tas dalās gan ar 3, gan ar 7, jo $21 = 3 \cdot 7$. Dotais skaitlis dalās ar 3, jo tā ciparu summa 21 dalās ar 3. Dotais skaitlis dalās arī ar 7 saskaņā ar dalāmības pazīmi, jo

$$20552 - 14 = 20538$$

$$2053 - 16 = 2037$$

$$203 - 14 = 189$$

Skaitlis 189 dalās ar 7, jo 189:7 = 27, tāpēc dotais skaitlis 205527 dalās ar 21.

3. Pamato, ka trīsciparu skaitlis $\overline{abc}$ dalās ar 7, ja $2a + 3b + c$ dalās ar 7!

Atrisinājums. Doto skaitli $\overline{abc}$ apzīmēsim ar *A*, bet izteiksmi $2a + 3b + c$ apzīmēsim ar *B*. Apskatīsim starpību *A – B*. Ja šī starpība dalās ar 7, tad arī skaitlis *A* dalās ar 7. Izteiksim skaitli *A* decimālajā pierakstā un veiksim pārveidojumus:

$$A - B = \overline{abc} - B = 100a + 20b + c - 2a - 3b - c =$$
$$= 98a + 7b = 7 \cdot (14a + b)$$

Ieguvām, ka starpība *A – B* dalās ar 7, tāpēc arī dotais skaitlis $A = \overline{abc}$ dalās ar 7.

4. Atrodi tādu lielāko 5 – ciparu skaitli, kas dalās gan ar 5, gan 7! Atrodi arī tādu sešciparu skaitli!

Atrisinājums. Lielākais piecciparu skaitlis ir 99999, bet tas nedalās ne ar 5, ne ar 7. Aplūkojam lielāko piecciparu skaitli, kas dalās ar 5. Tas ir skaitlis 99995. Pārbaudām, ka tas dalās ar 7. Lielākais piecciparu skaitlis, kas dalās ar 35, ir atrasts.

Līdzīgi var aplūkot lielāko sešciparu skaitli 999999, kas dalās ar 7, bet nedalās ar 5. Tātad jāatņem tāds mazākais skaitlis, kas dalās ar 7 un beidzas ar 4 (jo 9 – 4 = 5) vai beidzas ar 9. No skaitļa 999999 jāatņem 14 vai 49, tad rezultāts dalīsies ar 35. Lielākais skaitlis, kas dalās ar 35 ir 999985.

5. Četrciparu skaitļa ciparu summa ir 14. Zināms, ka divu vidējo ciparu summa ir 9, bet tūkstošu cipars mīnus vienu cipars ir 1, un skaitlis dalās ar 11. Kāds ir šis skaitlis?

Atrisinājums. Saskaņā ar uzdevuma noteikumiem pirmais skaitļa cipars ir 3, bet pēdējais ir 2. Var secināt, ka dalot skaitli ar 11, iegūst trīsciparu skaitli, kura pirmais cipars ir 3, bet pēdējais ir 2. Tad doto skaitli var izteikt $\overline{3(3+n)(2+n)2} : 11 = \overline{3n2}$

Zināms, ka 3 +*n* + 2 + *n* = 9, tāpēc *n* = 2 un dotais skaitlis ir 3542.

6. Pierādi, ka skaitlis, kas sastāv no 27 vieniniekiem, dalās ar 27!

Piezīme. Te jāsaprot, ka, ja skaitļa ciparu summa ir 27, tas vēl nenozīmē, ka skaitlis dalās ar 27. (Atrodi tādu piemēru, kur skaitļa ciparu summa ir 27, bet pats skaitlis ar 27 nedalās!)

Atrisinājums. Jāpierāda, ka skaitlis dalās ar 9 un skaitļa dalījums ar 9 dalās arī ar 3. Aplūkojam mazāku skaitli, kas sastāv no deviņiem vieniniekiem un dalām to ar 9:

$$111111111 : 9 = 12345679$$

Rezultāts nedalās ar 3, jo dalījuma ciparu summa ir 37. Dotajam skaitlim ir trīs tādas vieninieku grupas, tāpēc visa dotā skaitļa dalījums satur katru no iegūtā dalījuma cipariem 3 reizes. (Dotā skaitļa dalījums satur 3 grupas ar skaitļiem 12345679, kur pa vidu starp blakus esošām grupām ir nulle.) Dotā 27 ciparu skaitļa dalījuma ar 9 ciparu summa ir $3 \cdot 37$, tāpēc tas dalās ar 3 un viss dotais skaitlis dalās ar 27.

7. Atrodi tādu skaitli, kuru reizinot pašu ar sevi, iegūst skaitli, kas beidzas ar 444! Pamato, ka šādu skaitļu ir bezgalīgi daudz!

Piezīme. Skaitļa reizinājums pašam ar sevi tiek saukts par skaitļa kvadrātu $a \cdot a = a^2$

Atrisinājums. Meklētais skaitlis varētu būt divciparu skaitlis, kas beidzas ar 2 vai 8. Apskatīsim skaitli $\overline{a2} = 10a + 2$.

Skaitļa kvadrāts ir $(10a + 2) \cdot (10a + 2) = 100a^2 + 40a + 4$

Lai kvadrāta otrais cipars no beigām ir 4, ciparam a ir jābūt 1 vai 6. Aprēķināsim skaitļu kvadrātus $12 \cdot 12 = 144$; $62 \cdot 62 = 3844$. Neviens no abiem skaitļiem neapmierina uzdevuma nosacījumus.

Apskatīsim skaitli $10a + 8$. Tā kvadrāts ir

$$(10a + 8) \cdot (10a + 8) = 100a^2 + 16a + 64$$

Lai otrais cipars no beigām būtu 4, ir jāizpildās $6a + 6 = \overline{b4}$.

Tas iespējams, ja $a = 3$ vai $a = 8$ ($6+18 = 24$; $6 + 46 = 54$). Pārbaudām abus skaitļus

$$38 \cdot 38 = 1444; \quad 88 \cdot 88 = 7744$$

No šiem abiem derīgs skaitlis ir 38.

Vai var atrast arī citus skaitļus ar minēto īpašību? Te aplūkojām visas iespējas starp divciparu skaitļiem. Var atrast skaitļus, kuri ir lielāki. Tie būs formā

$$\overline{Ab12};\ \overline{Ab62};\ \overline{Ab38};\ \overline{Ab88}$$

Aplūkosim vienu piemēru no šiem un tā kvadrātu:

$$\overline{Ab38} \cdot \overline{Ab38} = \bar{A}^2 \cdot 1000 \cdot 1000 + 2\bar{A} \cdot \overline{b38} \cdot 1000 + \overline{b38}^2$$

Pirmie divi saskaitāmie neietekmē pēdējos 3 ciparus, no kā var secināt, ka skaitļa sākums $\bar{A}$ var būt jebkura ciparu virkne. Sīkāk aplūkosim pēdējo saskaitāmo:

$$\overline{b38} \cdot \overline{b38} = 100 \cdot 100b^2 + 76 \cdot 100b + 1444$$

Lai trešais cipars no beigām būtu 4, ir jāizpildās

$$6b + 4 = \overline{c4}$$

Tas iespējams tad, ja $b = 0$ vai $b = 5$. Pārbaudīsim skaitli 538

$$538 \cdot 538 = 289444$$

Dotā uzdevuma nosacījumiem atbilst jebkurš skaitlis, kas beidzas ar 038 vai 538. Ir atrodami arī citi skaitļi (te aplūkojām vienu no 4 iespējām).