Valsts izglītības satura centrs

NACIONĀLAIS ATTĪSTĪBAS PLĀNS 2020

EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais fonds

I E G U L D Ī J U M S   T A V Ā   N Ā K O T N Ē

Latvijas 70. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.
Tīrrakstā uzdevumu numuriem jābūt labi pamanāmiem – izceltiem vai atdalītiem no pārējā teksta.
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

31.01.2020.

1. Vienādsānu trijstūra pamata malas garums ir 10 cm, bet perimetrs ir mazāks nekā 30 cm. Kāds var būt trijstūra sānu malas garums?

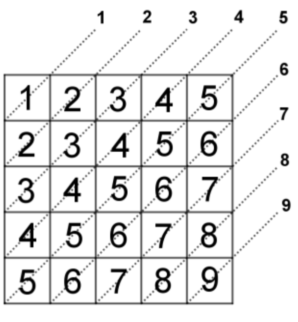
2. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{2019\cdot 2021}=\frac{1010}{2021}.$$

3. Divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2 iekšēji pieskaras punktā A (ω_2 atrodas ω_1 iekšpusē) un ω_1 centrs neatrodas ω_2 iekšpusē. Riņķa līnijas ω_1 diametrs AB šķērso ω_2 punktā C. Zināms, ka ω_1 hordas DE, kas iet caur C perpendikulāri AB, garums sakrīt ar BC garumu. Aprēķināt ω_1 un ω_2 diametru garumu attiecību $\frac{AB}{AC}$.

4. Uz katras no $2N$ kartītēm uzrakstīts viens naturāls skaitlis no 1 līdz N, katrs skaitlis uzrakstīts uz tieši divām kartītēm. Kartītes jāsaliek rindā vienu aiz otras tā, lai starp kartītēm, uz kurām uzrakstīts skaitlis k, atrastos tieši k citas kartītes. Vai kartītes var salikt prasītajā veidā, ja **a)** $N=4$, **b)** $N=5$?

5. Dota $N\times N$ rūtiņu tabula, kurā visas diagonāles ir sanumurētas pēc kārtas ar skaitļiem no 1 līdz $2N-1$. Visās rūtiņās, kas pieder vienai diagonālei, ierakstīts šīs diagonāles numurs (piemēram, 1. att. parādīts tabulas aizpildījums, ja $N=5$). Pierādīt, ka visām naturālām N vērtībām visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir kāda naturāla skaitļa kubs!



1. att.

LATVIJAS UNIVERSITĀTE ANNO 1919

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultāte
A. Liepas Neklātienes matemātikas skola

Valsts izglītības satura centrs

NACIONĀLAIS ATTĪSTĪBAS PLĀNS 2020

EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais fonds

IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

Latvijas 70. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.
Tīrrakstā uzdevumu numuriem jābūt labi pamanāmiem – izceltiem vai atdalītiem no pārējā teksta.
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

31.01.2020.

1. Pierādīt, ka katram naturālam n izpildās vienādība

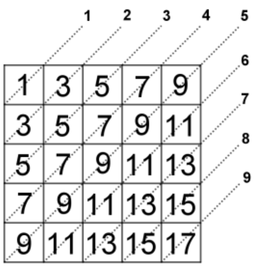
$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

2. Vai eksistē tāds dažādmalu trijstūris, kura malu garumi ir naturāli skaitļi, kas veido ģeometrisko progresiju?

3. Divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2 iekšēji pieskaras punktā A (ω_2 atrodas ω_1 iekšpusē) un ω_1 centrs neatrodas ω_2 iekšpusē. Riņķa līnijas ω_1 diametrs AB šķērso ω_2 punktā C. Pieskares BF, kas no B vilkta pret ω_2, un ω_1 hordas DE, kas iet caur C perpendikulāri AB, garumi sakrīt. Aprēķināt ω_1 un ω_2 diametru garumu attiecību $\frac{AB}{AC}$.

4. Uz katras no $2N$ kartītēm uzrakstīts viens naturāls skaitlis no 1 līdz N, katrs skaitlis uzrakstīts uz tieši divām kartītēm. Kartītes jāsaliek rindā vienu aiz otras tā, lai starp kartītēm, uz kurām uzrakstīts skaitlis k, atrastos tieši k citas kartītes. Vai kartītes var salikt prasītajā veidā, ja **a)** $N=6$, **b)** $N=7$?

5. Dota $N\times N$ rūtiņu tabula, kurā visas diagonāles ir sanumurētas pēc kārtas ar skaitļiem no 1 līdz $2N-1$. Katram i, kur $1\le i\le 2N-1$ visās rūtiņās, kas pieder diagonālei ar numuru i, ierakstīts i-tais nepāra skaitlis pēc kārtas (piemēram, 1. att. parādīts tabulas aizpildījums, ja $N=5$). Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu naturālu N vērtību, ka visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts!



1. att.

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
ANNO 1919

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultāte
A. Liepas Neklātienes matemātikas skola

Valsts izglītības satura centrs
NACIONĀLAIS ATTĪSTĪBAS PLĀNS 2020
EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais fonds
IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

Latvijas 70. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.
Tīrrakstā uzdevumu numuriem jābūt labi pamanāmiem – izceltiem vai atdalītiem no pārējā teksta.
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

31.01.2020.

1. Pierādīt, ka visām naturālām n vērtībām $6^{2n}+19^n-2^{n+1}$ dalās ar 17.

2. Bezgalīgas augošas aritmētiskās progresijas locekļi ir naturāli skaitļi. Pierādīt, ka tajā ir tāds loceklis, kurā desmit cipari pēc kārtas ir piecinieki!

3. Divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2 ārēji pieskaras. Taisne t pieskaras ω_1 punktā A, bet ω_2 – punktā B. Ir novilkts ω_1 diametrs AC un no punkta C – pieskare CD pret ω_2 (D – pieskaršanās punkts). Pierādīt, ka $AC=CD$!

4. Pa apli uzrakstīti 10 naturāli skaitļi, kuru summa ir 100. Zināms, ka jebkuru trīs pēc kārtas esošu skaitļu summa ir vismaz 29. Kādu lielāko vērtību var pieņemt lielākais no šiem desmit skaitļiem?

5. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $n^3=(n-1)^3+(n-2)^3+(n-3)^3$.

LATVIJAS UNIVERSITĀTE ANNO 1919
LATVIJAS UNIVERSITĀTE
Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultāte
A. Liepas Neklātienes matemātikas skola

Valsts izglītības satura centrs
NACIONĀLAIS ATTĪSTĪBAS PLĀNS 2020
EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Sociālais fonds
IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

Latvijas 70. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

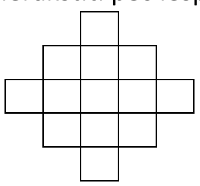
12. klase

Tīrrakstā ir jāraksta ne tikai uzdevuma atbilde, bet arī risinājums, spriedumi, aprēķini, secinājumi.
Tīrrakstā uzdevumu numuriem jābūt labi pamanāmiem – izceltiem vai atdalītiem no pārējā teksta.
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

31.01.2020.

1. Virkne (x_n) definēta rekurenti: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = -29$ un $x_{n+3} = 9x_{n+2} - 26x_{n+1} + 24x_n$ visiem naturāliem n. Pierādīt, ka $x_n = 2^n + 3^n - 4^n$ visiem naturāliem n.

2. **a)** Parādi vienu veidu, kā 1. att. figūras katrā rūtiņā ierakstīt veselu skaitli tā, lai jebkurā taisnstūrī 1×3 vai 3×1 ierakstīto skaitļu summa būtu 2020 un arī visu trīspadsmit ierakstīto skaitļu summa būtu 2020.
b) Parādi, kā prasīto izdarīt, lai figūrā būtu ierakstīti pēc iespējas vairāk dažādi skaitļi!



1. att.

3. Dots trijstūris ABC, kurā $\sphericalangle A < \sphericalangle C$. Uz malas BC pagarinājuma izvēlēts punkts D tā, ka B atrodas starp C un D un $BD = AB$. Uz leņķa ABC bisektrises izvēlēts punkts E tā, ka $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ACB$. Nogriežņi BE un AC krustojas punktā F. Taisne, kas novilkta caur punktu E paralēli CD, krusto nogriezni AD punktā G. Pierādīt, ka $AG = BF$.

4. Debesskrāpī, kurā strādā profesors Cipariņš, ir 500 stāvi un tā liftā ir neparasta vadības pults: tajā var ievadīt naturālu skaitli n, kas nepārsniedz 100, nospiest pogu <uz augšu> vai < uz leju> un lifts brauks n stāvus attiecīgi uz augšu vai uz leju. Tā, piemēram, parasti profesors Cipariņš, lai aizbrauktu no 1. stāva uz savu kabinetu 314. stāvā, brauc uz augšu trīs reizes pa 100 stāviem, un tad vienu reizi 13 stāvus uz augšu. Diemžēl šorīt izrādījās, ka lifts ir salūzis, un reizēm tas brauc nepareizā virzienā, tas ir, var gadīties, ka tā vietā, lai brauktu n stāvus uz augšu, tas aizbrauc n stāvus uz leju (un otrādi). Parādiet, kā ar salūzušo liftu profesors Cipariņš var nokļūt no 1. stāva uz savu kabinetu 314. stāvā, ja zināms, ka lifts nekad neaizbrauc nepareizi 7 reizes pēc kārtas, tas ir, ja tas ir sešas reizes pēc kārtas kļūdījies, tad septītajā tas noteikti aizbrauks pareizajā virzienā.
Piezīme. Lifts nebrauc zemāk par 1. un augstāk par 500. stāvu. Ja, piemēram, tam jābrauc no 3. stāva 5 stāvus uz leju, tas aizbrauc līdz 1. stāvam un tur apstājas.

5. Zināms, ka naturāli skaitļi x un y ir tādi, ka $x^2 + y^2 + 1$ dalās ar 13. Pierādīt: **a)** $x^2 - y^2$ nedalās ar 13, **b)** tieši viens no skaitļiem x^4, y^4, $x^4 + y^4 + 1$ dalās ar 13.

LATVIJAS UNIVERSITĀTE ANNO 1919
LATVIJAS UNIVERSITĀTE
Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultāte
A. Liepas Neklātienes matemātikas skola