Latvijas 70. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi un atrisinājumi

9.1. Vienādsānu trijstūra pamata malas garums ir 10 cm, bet perimetrs ir mazāks nekā 30 cm. Kāds var būt trijstūra sānu malas garums?

Atrisinājums. Trijstūra sānu malas garumu apzīmējam ar x. Tad no dotā iegūstam, ka jāizpildās nevienādībai

$$10 + x + x < 30$$
$$2x < 20$$
$$x < 10.$$

Lai trijstūris eksistētu, jāizpildās trijstūra nevienādībai, tas ir, $x + 10 > x$ (patiesa visām x vērtībām) un $x + x > 10$ jeb $x > 5$. Līdz ar to $x \in (5; 10)$ jeb trijstūra sānu malas garums ir lielāks nekā 5 cm un mazāks nekā 10 cm.

9.2. Pierādīt, ka $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{2019\cdot 2021} = \frac{1010}{2021}$.

Atrisinājums. Ievērojam, ka visiem naturāliem skaitļiem n izpildās vienādība $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$. Tāpēc pierādāmās vienādības kreisās puses izteiksmi var pārveidot formā:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{2019\cdot 2021} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2019} - \frac{1}{2021}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2021}\right).$$

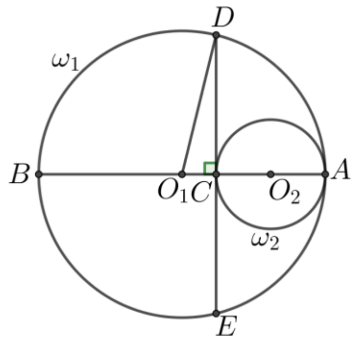
Ievērojam, ka šajā izteiksmē parādās pretēji skaitļi, kuru summa ir 0, līdz ar to pēc vienkāršošanas paliek tikai divi saskaitāmie $\frac{1}{1}$ un $\left(-\frac{1}{2021}\right)$, tātad

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{2019\cdot 2021} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2021}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2020}{2021} = \frac{1010}{2021},$$

kas arī bija jāpierāda.

9.3. Divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2 iekšēji pieskaras punktā A (ω_2 atrodas ω_1 iekšpusē) un ω_1 centrs neatrodas ω_2 iekšpusē. Riņķa līnijas ω_1 diametrs AB šķērso ω_2 punktā C. Zināms, ka ω_1 hordas DE, kas iet caur C perpendikulāri AB, garums sakrīt ar BC garumu. Aprēķināt ω_1 un ω_2 diametru garumu attiecību $\frac{AB}{AC}$.

1. atrisinājums. Simetrijas dēļ $CD = CE$ un pēc dotā $BC = 2CD$ (skat. 1. att.). Pēc krustisku hordu īpašības iegūstam, ka $BC \cdot CA = CD^2$ jeb $2CD \cdot CA = CD^2$, no kā iegūstam $AC = \frac{1}{2}CD$. Tātad $AB = BC + AC = 2CD + \frac{1}{2}CD = \frac{5}{2}CD$ un varam aprēķināt prasīto $\frac{AB}{AC} = \frac{\frac{5}{2}CD}{\frac{1}{2}CD} = 5$.



1. att.

2. atrisinājums. Apzīmējam $O_1D = O_1A = R$ un $O_2A = O_2C = r$, kur O_1 un O_2 ir attiecīgi riņķa līniju ω_1 un ω_2 centri (skat. 1. att.). Ievērojam, ka $BC = AB - AC = 2R - 2r$, $O_1C = O_1A - AC = R - 2r$ un simetrijas dēļ $CD = \frac{1}{2}BC = R - r$. Pēc Pitagora teorēmas taisnleņķa trijstūrī O_1CD iegūstam, ka $CD^2 = O_1D^2 - O_1C^2$. Līdz ar to esam ieguvuši vienādojumu

$$\left(\frac{1}{2}BC\right)^2 = O_1D^2 - O_1C^2$$
$$(R-r)^2 = R^2 - (R-2r)^2$$
$$R^2 - 2Rr + r^2 = R^2 - R^2 + 4Rr - 4r^2$$
$$R^2 - 6Rr + 5r^2 = 0.$$

Izmantojot grupēšanas paņēmienu, sadalām kreisās puses izteiksmi reizinātājos:

$$R^2 - Rr - 5Rr + 5r^2 = 0$$
$$R(R-r) - 5r(R-r) = 0$$
$$(R-r)(R-5r) = 0.$$

Reizinājums ir 0 tikai tad, ja kāds no reizinātājiem ir 0. Tātad iespējami divi gadījumi:

- $R - r = 0$ jeb $R = r$, kas neder, jo riņķa līnijas šajā gadījumā sakrīt;
- $R - 5r = 0$ jeb $R = 5r$, tātad varam aprēķināt prasīto $\frac{AB}{AC} = \frac{2R}{2r} = \frac{R}{r} = 5$.

9.4. Uz katras no $2N$ kartītēm uzrakstīts viens naturāls skaitlis no 1 līdz N, katrs skaitlis uzrakstīts uz tieši divām kartītēm. Kartītes jāsaliek rindā vienu aiz otras tā, lai starp kartītēm, uz kurām uzrakstīts skaitlis k, atrastos tieši k citas kartītes. Vai kartītes var salikt prasītajā veidā, ja **a)** $N = 4$, **b)** $N = 5$?

Atrisinājums. a) Jā, kartītes var salikt, piemēram, skat. 2. att.

4	1	3	1	2	4	3	2

2. att.

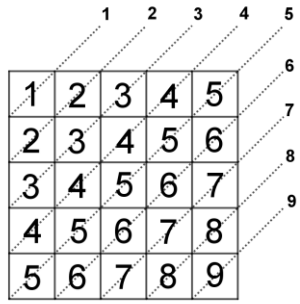
b) Pieņemsim, ka ir izdevies salikt kartītes rindā tā, kā prasīts. Sanumurēsim tās pēc kārtas ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 10 (skat. 3. att.).

1.	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*6.*	*7.*	*8.*	*9.*	*10.*

3. att.

Parādīsim, ka ir pāra skaits kartīšu, kas atrodas vietās ar pāra numuriem. No divām kartītēm, uz kurām uzrakstīts skaitlis 2, viena atrodas vietā ar pāra numuru, otra – vietā ar nepāra numuru. Tas ir spēkā arī kartītēm, uz kurām rakstīts 4. Tātad no šīm četrām kartītēm divas atrodas vietās ar pāra numuru, bet otras divas – vietās ar nepāra numuru.
Abas kartītes, uz kurām ir rakstīts viens un tas pats nepāra skaitlis (1, 3 vai 5), atrodas vietās, kuru numuriem ir vienāda paritāte (tas ir, abi ir pāra vai abi nepāra), tātad tās izmaina pāra vietās esošo kartīšu skaitu par pāra skaitli (0 vai 2).
Redzam, ka kopā vietās ar pāra numuriem atrodas pāra skaits kartīšu (tāpat arī vietās ar nepāra numuriem).
Bet pavisam ir 5 vietas ar pāra numuriem un 5 vietas ar nepāra numuriem, iegūta pretruna, tātad prasīto izdarīt nevar.

9.5. Dota $N \times N$ rūtiņu tabula, kurā visas diagonāles ir sanumurētas pēc kārtas ar skaitļiem no 1 līdz $2N-1$. Visās rūtiņās, kas pieder vienai diagonālei, ierakstīts šīs diagonāles numurs (piemēram, 4. att. parādīts tabulas aizpildījums, ja $N=5$). Pierādīt, ka visām naturālām N vērtībām visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir kāda naturāla skaitļa kubs!



4. att.

1. atrisinājums. Aplūkojam tādas divas rūtiņas, kas ir simetriskas attiecībā pret galveno diagonāli, kas iet caur visām rūtiņām, uz kurām rakstīts skaitlis N. Ja viena no tām atrodas uz diagonāles, kura ir k diagonāles "pirms" galvenās diagonāles, tad otra atrodas uz diagonāles, kura ir k diagonāles "aiz" galvenās diagonāles, tas nozīmē, ka tajās ir ierakstīti attiecīgi skaitļi $(N-k)$ un $(N+k)$ un to summa ir $2N$. Tas nozīmē, ja abus šajās rūtiņās esošos skaitļus $(N-k)$ un $(N+k)$ aizstāj ar N, tad to summa nemainās. Tā izdarot ar visiem simetriskajiem rūtiņu pāriem, iegūstam kvadrātu, kurā visās $N \cdot N = N^2$ rūtiņās ierakstīts skaitlis N, tātad visu kvadrātā ierakstīto skaitļu summa ir $N^2 \cdot N = N^3$.

2. atrisinājums. Ievērojam, ka vismazākā ir pirmajā rindā ierakstīto skaitļu summa, bet katrā nākamajā tā ir par N lielāka nekā iepriekšējā rindā. Ja pirmās rindas skaitļu summa ir $s = 1+2+\cdots+N$, tad otrās rindas skaitļu summa ir $(s+N)$, trešās rindas skaitļu summa ir $(s+2N)$, ..., pēdējās rindas skaitļu summa ir $(s+(N-1)N)$. Tātad visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir

$$Ns + N\big(1+2+\cdots+(N-1)\big) = N(1+2+\cdots+N) + N \cdot \frac{N\cdot(N-1)}{2} =$$

$$= N \cdot \frac{N\cdot(N+1)}{2} + N \cdot \frac{N\cdot(N-1)}{2} = \frac{N}{2}(N^2 - N + N^2 + N) = N^3.$$

10.1. Pierādīt, ka katram naturālam n izpildās vienādība

$$\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.

Indukcijas bāze. Ja $n=1$, tad $\frac{1^2}{1\cdot 3} = \frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}$ jeb $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka vienādība izpildās, ja $n=k$, tas ir,

$$\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)}.$$

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka vienādība ir spēkā arī tad, ja $n=k+1$, tas ir,

$$\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{(k+1)^2}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)} = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2(2(k+1)+1)}$$

jeb

$$\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}.$$

Pārveidojam vienādības kreisās puses izteiksmi:

$$\underbrace{\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}}_{induktīvais\ pieņēmums}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$=\frac{k+1}{2k+1}\left(\frac{k}{2}+\frac{k+1}{2k+3}\right)=\frac{k+1}{2k+1}\left(\frac{2k^2+3k+2k+2}{2(2k+3)}\right)=\frac{(k+1)(2k^2+5k+2)}{(2k+1)2(2k+3)}=$$

$$=\frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{(2k+1)2(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}.$$

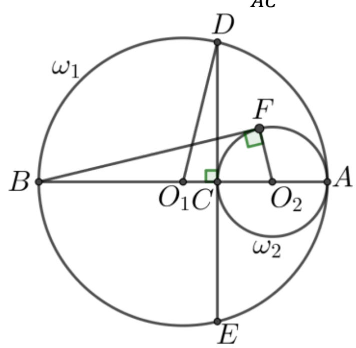
Secinājums. Tā kā vienādība ir patiesa, ja $n=1$, un no tā, ka vienādība ir spēkā, ja $n=k$, izriet, ka vienādība ir spēkā arī $n=k+1$, secinām, ka vienādība ir spēkā visām naturālām n vērtībām.

10.2. Vai eksistē tāds dažādmalu trijstūris, kura malu garumi ir naturāli skaitļi, kas veido ģeometrisko progresiju?

Atrisinājums. Jā, eksistē, piemēram, trijstūris ar malu garumiem 4, 6 un 9, jo šie skaitļi apmierina trijstūra nevienādību: $4+6>9$, $4+9>6$ un $6+9>4$ un tie veido ģeometrisko progresiju, kuras pirmais loceklis ir 4 un kvocients 1,5.

10.3. Divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2 iekšēji pieskaras punktā A (ω_2 atrodas ω_1 iekšpusē) un ω_1 centrs neatrodas ω_2 iekšpusē. Riņķa līnijas ω_1 diametrs AB šķērso ω_2 punktā C. Pieskares BF, kas no B vilkta pret ω_2, un ω_1 hordas DE, kas iet caur C perpendikulāri AB, garumi sakrīt. Aprēķināt ω_1 un ω_2 diametru garumu attiecību $\frac{AB}{AC}$.

1. atrisinājums. Simetrijas dēļ $CD=CE$ (skat. 5. att.) un pēc dotā $BF=2CD$. Pēc pieskares-sekantes īpašības iegūstam, ka $BF^2=BC\cdot AB$ jeb $4CD^2=BC\cdot AB$ un pēc krustisku hordu īpašības $BC\cdot AC=CD^2$, no kā iegūstam $4BC\cdot AC=BC\cdot AB$ jeb $4AC=AB$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka $\frac{AB}{AC}=4$.



5. att.

2. atrisinājums. Apzīmējam $O_1D=O_1A=R$ un $O_2A=O_2C=r$, kur O_1 un O_2 ir attiecīgi riņķa līniju ω_1 un ω_2 centri (skat. 5. att.). Ievērojam, ka $O_1C=O_1A-AC=R-2r$ un $O_2B=AB-AO_2=2R-r$. Pēc Pitagora teorēmas taisnleņķa trijstūrī O_1CD un BFO_2 iegūstam

- $CD^2=O_1D^2-O_1C^2=R^2-(R-2r)^2=4Rr-4r^2$;
- $BF^2=O_2B^2-O_2F^2=(2R-r)^2-r^2=4R^2-4Rr$.

Tā kā simetrijas dēļ $CD=\frac{1}{2}BF$, tad $4CD^2=BF^2$ un iegūstam vienādojumu

$$16Rr-16r^2=4R^2-4Rr$$
$$R^2-5Rr+4r^2=0.$$

Izmantojot grupēšanas paņēmienu, sadalām kreisās puses izteiksmi reizinātājos:

$$R^2-Rr-4Rr+4r^2=0$$
$$R(R-r)-4r(R-r)=0$$
$$(R-r)(R-4r)=0.$$

Reizinājums ir 0 tikai tad, ja kāds no reizinātājiem ir 0. Tātad iespējami divi gadījumi:

- $R-r=0$ jeb $R=r$, kas neder, jo riņķa līnijas šajā gadījumā sakrīt;
- $R-4r=0$ jeb $R=4r$, tātad varam aprēķināt prasīto $\frac{AB}{AC}=\frac{2R}{2r}=\frac{R}{r}=4$.

10.4. Uz katras no $2N$ kartītēm uzrakstīts viens naturāls skaitlis no 1 līdz N, katrs skaitlis uzrakstīts uz tieši divām kartītēm. Kartītes jāsaliek rindā vienu aiz otras tā, lai starp kartītēm, uz kurām uzrakstīts skaitlis k, atrastos tieši k citas kartītes. Vai kartītes var salikt prasītajā veidā, ja **a)** $N = 6$, **b)** $N = 7$?

Atrisinājums. a) Pieņemsim, ka ir izdevies salikt kartītes rindā tā, kā prasīts. Sanumurēsim tās pēc kārtas ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 12 (skat. 6. att.).

1.	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*6.*	*7.*	*8.*	*9.*	*10.*	*11.*	*12.*

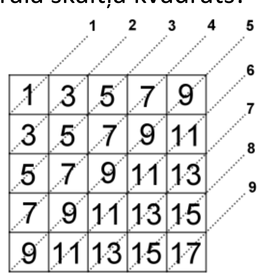
6. att.

Parādīsim, ka ir nepāra skaits kartīšu, kas atrodas vietās ar pāra numuriem. No divām kartītēm, uz kurām uzrakstīts skaitlis 2, viena atrodas vietā ar pāra numuru, otra – vietā ar nepāra numuru. Tas ir spēkā arī kartītēm, uz kurām rakstīts 4 un arī 6. Tātad no šīm sešām kartītēm trīs atrodas vietās ar pāra numuru, bet otras trīs – vietās ar nepāra numuru.
Abas kartītes, uz kurām ir rakstīts viens un tas pats nepāra skaitlis (1, 3 vai 5), atrodas vietās, kuru numuriem ir vienāda paritāte (tas ir, abi ir pāra vai abi nepāra), tātad tās izmaina pāra vietās esošo kartīšu skaitu par pāra skaitli (0 vai 2).
Redzam, ka kopā vietās ar pāra numuriem atrodas nepāra skaits kartīšu (tāpat arī vietās ar nepāra numuriem).
Bet pavisam ir 6 vietas ar pāra numuriem un 6 vietas ar nepāra numuriem, iegūta pretruna, tātad prasīto izdarīt nevar.
b) Jā, kartītes var salikt, piemēram, skat. 7. att.

5	2	7	3	2	6	5	3	4	1	7	1	6	4

7. att.

10.5. Dota $N \times N$ rūtiņu tabula, kurā visas diagonāles ir sanumurētas pēc kārtas ar skaitļiem no 1 līdz $2N - 1$. Katram i, kur $1 \leq i \leq 2N - 1$ visās rūtiņās, kas pieder diagonālei ar numuru i, ierakstīts i-tais nepāra skaitlis pēc kārtas (piemēram, 8. att. parādīts tabulas aizpildījums, ja $N = 5$). Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu naturālu N vērtību, ka visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir kāda naturāla skaitļa kvadrāts!



8. att.

1. atrisinājums. Aplūkojam kādas divas rūtiņas, kas ir simetriskas attiecībā pret galveno diagonāli, kas iet caur visām rūtiņām, uz kurām rakstīts skaitlis $2N - 1$. Ja viena no tām atrodas uz diagonāles, kura ir k diagonāles "pirms" galvenās diagonāles, tad otra atrodas uz diagonāles, kura ir k diagonāles "aiz" galvenās diagonāles, tas nozīmē, ka tajās ir ierakstīti attiecīgi skaitļi $(2N - 1 - 2k)$ un $(2N - 1 + 2k)$ un to summa ir $4N - 2$. Tas nozīmē, ja abus šajās rūtiņās esošos skaitļus $(2N - 1 - 2k)$ un $(2N - 1 + 2k)$ aizstāj ar $2N - 1$, tad to summa nemainās. Tā izdarot ar visiem simetriskajiem rūtiņu pāriem, iegūstam kvadrātu, kurā visās $N \cdot N = N^2$ rūtiņās ierakstīts skaitlis $2N - 1$, tātad visu kvadrātā ierakstīto skaitļu summa ir $N^2 \cdot (2N - 1)$. Ja $2N - 1$ ir kāda naturāla nepāra skaitļa k kvadrāts (tas ir, $2N - 1 = k^2$ jeb $N = \frac{k^2+1}{2}$, kur k – jebkurš naturāls nepāra skaitlis), tad tabulā ierakstīto skaitļu summa ir naturāla skaitļa $\frac{k(k^2+1)}{2}$ kvadrāts. Tā kā naturālu nepāra skaitļu ir bezgalīgi daudz, tad arī derīgu N vērtību ir bezgalīgi daudz.

2. atrisinājums. Ievērojam, ka vismazākā skaitļu summa ir pirmajā rindā, bet katrā nākamajā rindā summa ir tieši par $2N$ lielāka. Ja pirmās rindas rūtiņās ierakstīto skaitļu summa ir s, tad otrajā rindā skaitļu summa ir $s + 2N$, trešajā rindā skaitļu summa ir $s + 4N$, ..., pēdējā rindā skaitļu summa ir $s + 2(N - 1)N$. Visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir $Ns + 2N(1 + 2 + \cdots + (N - 1))$.

Aprēķinām pirmās rindas skaitļu summu:

$$s = 1 + 3 + 5 + \dots + (2N-1) = 1 + (1+2) + (1+4) + \dots + \big(1 + 2(N-1)\big) =$$
$$= N + 2\big(1 + 2 + \ldots + (N-1)\big) = N + N(N-1) = N^2.$$

Līdz ar to visas tabulas skaitļu summa ir $N^3 + N^2(N-1) = 2N^3 - N^2 = N^2(2N-1)$. Ja $2N-1$ ir kāda naturāla nepāra skaitļa k kvadrāts (tas ir, $2N - 1 = k^2$ jeb $N = \frac{k^2+1}{2}$, kur k – jebkurš naturāls nepāra skaitlis), tad tabulā ierakstīto skaitļu summa ir naturāla skaitļa $\frac{k(k^2+1)}{2}$ kvadrāts. Tā kā naturālu nepāra skaitļu ir bezgalīgi daudz, tad arī derīgu N vērtību ir bezgalīgi daudz.

11.1. Pierādīt, ka visām naturālām n vērtībām $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$ dalās ar 17.

1. atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.

Indukcijas bāze. Ja $n = 1$, tad $6^2 + 19^1 - 2^2 = 51$, kas dalās ar 17.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess, ja $n = k$, tas ir, $6^{2k} + 19^k - 2^{k+1}$ dalās ar 17.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka apgalvojums ir patiess arī, ja $n = k + 1$, tas ir, $6^{2k+2} + 19^{k+1} - 2^{k+2}$ dalās ar 17.

Pārveidojam izteiksmi:

$$6^{2k+2} + 19^{k+1} - 2^{k+2} = 36 \cdot 6^{2k} + 19 \cdot 19^k - 2 \cdot 2^{k+1} =$$
$$= \underbrace{19 \cdot \left(6^{2k} + 19^k - 2^{k+1}\right)}_{\vdots 17} + \underbrace{17 \cdot 6^{2k}}_{\vdots 17} + \underbrace{17 \cdot 2^{k+1}}_{\vdots 17}.$$

Tā kā katrs saskaitāmais dalās ar 17, tad arī summa dalās ar 17.

Secinājums. Tā kā apgalvojums ir patiess, ja $n = 1$, un no tā, ka apgalvojums ir patiess, ja $n = k$, izriet, ka apgalvojums ir patiess arī $n = k + 1$, secinām, ka apgalvojums ir patiess visām naturālām vērtībām.

2. atrisinājums. Apskatām doto izteiksmi pēc moduļa 17:

$$6^{2n} + 19^n - 2^{n+1} \equiv 36^n + 19^n - 2 \cdot 2^n \equiv 2^n + 2^n - 2 \cdot 2^n \equiv 0 \pmod{17}.$$

11.2. Bezgalīgas augošas aritmētiskās progresijas locekļi ir naturāli skaitļi. Pierādīt, ka tajā ir tāds loceklis, kurā desmit cipari pēc kārtas ir piecinieki.

Atrisinājums. Apzīmējam aritmētiskās progresijas diferenci ar d un izvēlēsimies tādu naturālu skaitli n, kuram $d < 10^n$. Aplūkojam 10^n pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus, no kuriem pirmais sākas ar m piecniekiem un beidzas n nullēm un $m \geq 10$ ir izvēlēts tāds, lai šis pirmais skaitlis būtu lielāks nekā mūsu aritmētiskās progresijas pirmais loceklis:

$$\underbrace{5555\dots555}_{m \text{ piecinieki}}\underbrace{00\dots00}_{n \text{ nulles}}; \quad 5\dots500\dots01; \quad 5\dots500\dots02; \quad \dots, \quad 5\dots599\dots98; \quad 5\dots599\dots99.$$

Tā kā šie ir vairāk nekā d pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi, tad vismaz viens no tiem piederēs dotajai aritmētiskajai progresijai un tajā ir vismaz 10 piecinieki pēc kārtas.

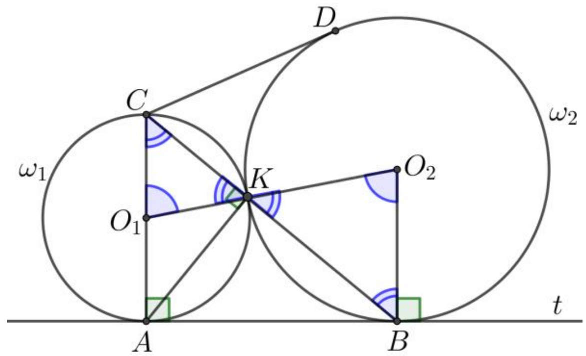
11.3. Divas riņķa līnijas ω_1 un ω_2 ārēji pieskaras. Taisne t pieskaras ω_1 punktā A, bet ω_2 – punktā B. Ir novilkts ω_1 diametrs AC un no punkta C – pieskare CD pret ω_2 (D – pieskaršanās punkts). Pierādīt, ka $AC = CD$!

1. atrisinājums. Ar O_1 un O_2 apzīmējam attiecīgi riņķa līniju ω_1 un ω_2 centrus, bet ar K – riņķa līniju pieskaršanās punktu (skat. 9. att.). Tā kā $AC \perp AB$ un $BO_2 \perp AB$, tad $\sphericalangle BO_2K = \sphericalangle CO_1K$ kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm AC un BO_2. Tad arī $\sphericalangle BKO_2 = \sphericalangle CKO_1$ kā vienādsānu trijstūru CO_1K un BO_2K leņķi pie pamata trijstūros ar vienādiem virsotnes leņķiem. Tātad punkts K ir nogriežņa BC iekšējs punkts.

Tā kā AC ir diametrs, tad $\sphericalangle CKA = 90°$ un pēc Eiklīda teorēmas taisnleņķa trijstūrī CAB iegūstam, ka $AC^2 = CK \cdot CB$.

Pēc pieskares-sekantes īpašības iegūstam, ka $CD^2 = CK \cdot CB$.

Tātad $AC^2 = CD^2$ un līdz ar to $AC = CD$.



9. att.

2. atrisinājums. Apzīmējam $O_1A = O_1C = r$ un $O_2B = O_2D = R$, kur O_1 un O_2 ir attiecīgi riņķa līniju ω_1 un ω_2 centri (skat. 10. att.). Novelkam $O_1E \perp O_2B$ un $O_2F \perp O_1C$, kur $E \in O_2B$ un $F \in O_1C$. Tā kā $O_1O_2 = r + R$ un $O_2E = R - r$, tad pēc Pitagora teorēmas ΔO_1EO_2 iegūstam

$$O_1E^2 = (O_1O_2)^2 - O_2E^2 = (r+R)^2 - (R-r)^2 = 4Rr.$$

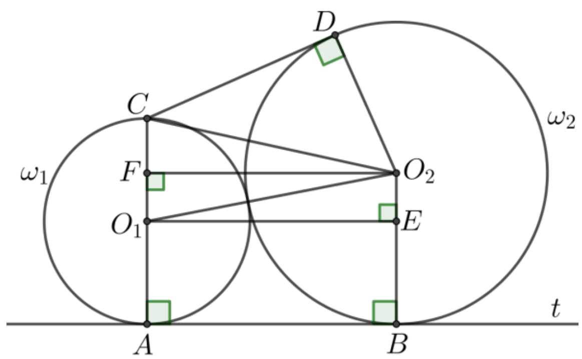
Ievērojam, ka $AB^2 = O_1E^2 = O_2F^2 = 4Rr$ un $O_2E = FO_1 = R - r$. Tātad $CF = CO_1 - FO_1 = r - (R - r) = 2r - R$ un pēc Pitagora teorēmas ΔCFO_2 iegūstam

$$O_2C^2 = CF^2 + O_2F^2 = (2r - R)^2 + 4Rr = 4r^2 + R^2.$$

Apskatām ΔCDO_2

$$CD^2 = O_2C^2 - O_2D^2 = 4r^2 + R^2 - R^2 = 4r^2.$$

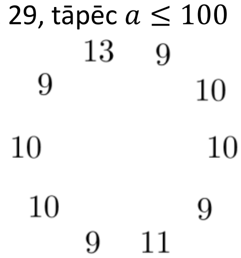
Līdz ar to $CD = 2r$ un $AC = 2 \cdot O_1A = 2r$, un esam pierādījuši, ka $AC = CD$.



10. att.

11.4. Pa apli uzrakstīti 10 naturāli skaitļi, kuru summa ir 100. Zināms, ka jebkuru trīs pēc kārtas esošu skaitļu summa ir vismaz 29. Kādu lielāko vērtību var pieņemt lielākais no šiem desmit skaitļiem?

Atrisinājums. Lielākais no šiem skaitļiem var būt 13, tad skaitļi var būt izvietoti, piemēram, kā parādīts 11. att. Pierādīsim, ka lielākais skaitlis nevar būt lielāks kā 13. Apzīmējam lielāko skaitli ar a un pārējos 9 skaitļus sadalām trīs trijniekos. Skaitļu summa katrā trijniekā ir vismaz 29, tāpēc $a \leq 100 - 3 \cdot 29 = 13$.



11. att.

11.5. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $n^3 = (n-1)^3 + (n-2)^3 + (n-3)^3$.

Atrisinājums. Ekvivalenti pārveidojam doto vienādojumu:

$$n^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 - 6n^2 + 12n - 8 + n^3 - 9n^2 + 27n - 27$$
$$2n^3 - 18n^2 + 42n - 36 = 0$$
$$n^3 - 9n^2 + 21n - 18 = 0.$$

Ievērojam, ka $6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$, tātad $n = 6$ ir dotā vienādojuma sakne un vienādojumu $n^3 - 9n^2 + 21n - 18 = 0$ var pārveidot formā (izdalot polinomu ar binomu $(n-6)$):

$$(n-6)(n^2 - 3n + 3) = 0.$$

Vienādojumam $n^2 - 3n + 3 = 0$ nav veselu sakņu, jo $D = 9 - 12 < 0$.

Piezīme. Tā kā vienādojuma veselās saknes var būt tikai brīvā locekļa dalītāji, tad var pārbaudīt visas iespējamās vērtības ± 1; ± 2; ± 3; ± 6; ± 9; ± 18.

12.1. Virkne (x_n) definēta rekurenti: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = -29$ un $x_{n+3} = 9x_{n+2} - 26x_{n+1} + 24x_n$ visiem naturāliem n. Pierādīt, ka $x_n = 2^n + 3^n - 4^n$ visiem naturāliem n.

Atrisinājums. Izmantosim matemātiskās indukcijas metodi.

Indukcijas bāze. Ja $n = 1$, tad $x_1 = 2^1 + 3^1 - 4^1 = 1$. Ja $n = 2$, tad $x_2 = 2^2 + 3^2 - 4^2 = -3$. Ja $n = 3$, tad $x_3 = 2^3 + 3^3 - 4^3 = -29$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka formula ir spēkā, ja $n = k$, $n = k + 1$ un $n = k + 2$, tas ir,

$$x_k = 2^k + 3^k - 4^k, \quad x_{k+1} = 2^{k+1} + 3^{k+1} - 4^{k+1} \quad \text{un} \quad x_{k+2} = 2^{k+2} + 3^{k+2} - 4^{k+2}.$$

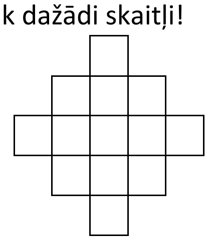
Induktīvā pāreja. Pierādīsim, ka formula ir spēkā arī tad, ja $n = k + 3$, tas ir, $x_{k+3} = 2^{k+3} + 3^{k+3} - 4^{k+3}$.

Izmantojot induktīvo pieņēmumu, iegūstam

$$x_{k+3} = 9x_{k+2} - 26x_{k+1} + 24x_k =$$
$$= 9\left(2^{k+2} + 3^{k+2} - 4^{k+2}\right) - 26\left(2^{k+1} + 3^{k+1} - 4^{k+1}\right) + 24\left(2^k + 3^k - 4^k\right) =$$
$$= 2^k(9 \cdot 4 - 26 \cdot 2 + 24) + 3^k(9 \cdot 9 - 26 \cdot 3 + 24) - 4^k(9 \cdot 16 - 26 \cdot 4 + 24) =$$
$$= 2^k \cdot 8 + 3^k \cdot 27 - 4^k \cdot 64 = 2^{k+3} + 3^{k+3} - 4^{k+3}.$$

Secinājums. Tā kā formula ir patiesa, ja $n = 1$, $n = 2$ un $n = 3$, un no tā, ka formula ir spēkā, ja $n = k$, $n = k + 1$ un $n = k + 2$, izriet, ka formula ir spēkā arī $n = k + 3$, secinām, ka formula ir spēkā visām naturālām n vērtībām.

12.2. a) Parādi vienu veidu, kā 12. att. figūras katrā rūtiņā ierakstīt veselu skaitli tā, lai jebkurā taisnstūrī 1×3 vai 3×1 ierakstīto skaitļu summa būtu 2020 un arī visu trīspadsmit ierakstīto skaitļu summa būtu 2020. **b)** Parādi, kā prasīto izdarīt, lai figūrā būtu ierakstīti pēc iespējas vairāk dažādi skaitļi!



12. att.

Atrisinājums. a) Skat., piemēram, 13. att., kur figūras labajā pusē norādītas atbilstošajā rindā esošo skaitļu summas, visu figūrā ierakstīto skaitļu summa ir $3S + S + 0 + S - 4S = S$, kur $S = 2020$.

b) Lielākais atšķirīgo skaitļu skaits ir 9, piemēram, skat. 13. att., kur $S = 2020$. Pamatosim, ka vairāk atšķirīgu skaitļu nevar ierakstīt. Apskatām rindu, kurā ir ierakstīti pieci skaitļi (skat. 14. att.). Tā kā $a + b + c = 2020$ un $b + c + d = 2020$, tad $a = d$ un simetrijas dēļ $b = e$. Tātad šajā rindā ir ierakstīti lielākais trīs atšķirīgi skaitļi. Arī kolonnā, kurā ir ierakstīti pieci skaitļi, lielākais trīs no tiem var būt dažādi. Tātad lielākais atšķirīgo skaitļu skaits ir $13 - 4 = 9$, jo pavisam ir 13 skaitļi un vismaz 4 ir vienādi ar kādu citu.

		$3S$			$3S$
	$10S$	$-4S$	$-5S$		S
0	$-S$	$2S$	0	$-S$	0
	$-8S$	$3S$	$6S$		S
		$-4S$			$-4S$

13. att.

a	b	c	d	e

14. att.

12.3. Dots trijstūris ABC, kurā $\sphericalangle A < \sphericalangle C$. Uz malas BC pagarinājuma izvēlēts punkts D tā, ka B atrodas starp C un D un $BD = AB$. Uz leņķa ABC bisektrises izvēlēts punkts E tā, ka $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ACB$. Nogriežņi BE un AC krustojas punktā F. Taisne, kas novilkta caur punktu E paralēli CD, krusto nogriezni AD punktā G. Pierādīt, ka $AG = BF$.

Atrisinājums. Pierādīsim, ka $\Delta ABF = \Delta EGA$ (skat. 15. att.).

Tā kā pēc bisektrises definīcijas $\sphericalangle CBF = \sphericalangle FBA$ un pēc dotā $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ACB$, tad $\sphericalangle BFC = \sphericalangle BEA$. Tātad $\sphericalangle BEA = \sphericalangle BFC = \sphericalangle AFE$, tāpēc ΔFAE ir vienādsānu trijstūris un $\boldsymbol{AE} = \boldsymbol{AF}$.

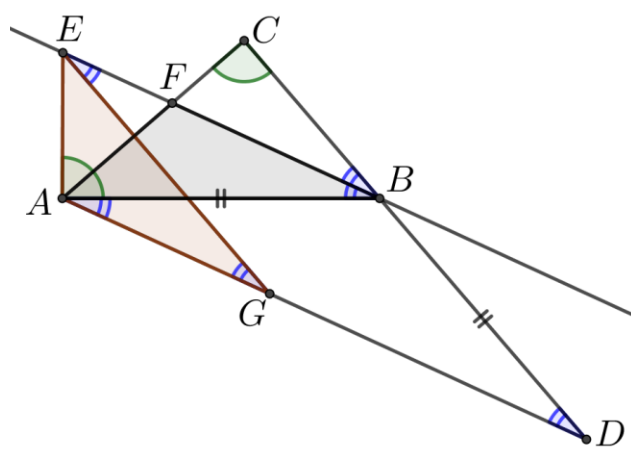
Ievērojam, ka $\sphericalangle EGA = \sphericalangle CDA$ kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm EG un CD. Tā kā trijstūris ABD ir vienādsānu, tad $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BAD$. Ievērojam, ka $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD + \sphericalangle BDA$ kā trijstūra ABD ārējais leņķis, tātad $\sphericalangle 2FBA = 2\sphericalangle BAD$ jeb $\sphericalangle BAD = \sphericalangle FBA$. Līdz ar to $\sphericalangle EGA = \sphericalangle ABF$.

Izmantojot, ka $\sphericalangle AFB$ ir trijstūra FCB ārējais leņķis, iegūstam

$$\sphericalangle \boldsymbol{AFB} = \sphericalangle ACB + \sphericalangle CBF = \sphericalangle EAB + \sphericalangle BAD = \sphericalangle \boldsymbol{EAG}.$$

Tā kā $\sphericalangle EGA = \sphericalangle ABF$ un $\sphericalangle EAG = \sphericalangle AFB$, tad arī $\sphericalangle \boldsymbol{AEG} = \sphericalangle \boldsymbol{FAB}$.

Tātad $\Delta ABF = \Delta EGA$ pēc pazīmes $\ell m \ell$ un $AG = BF$ kā atbilstošās malas.



15. att.

12.4. Debesskrāpī, kurā strādā profesors Cipariņš, ir 500 stāvi un tā liftā ir neparasta vadības pults: tajā var ievadīt naturālu skaitli n, kas nepārsniedz 100, nospiest pogu <uz augšu> vai < uz leju> un lifts brauks n stāvus attiecīgi uz augšu vai uz leju. Tā, piemēram, parasti profesors Cipariņš, lai aizbrauktu no 1. stāva uz savu kabinetu 314. stāvā, brauc uz augšu trīs reizes pa 100 stāviem, un tad vienu reizi 13 stāvus uz augšu.

Diemžēl šorīt izrādījās, ka lifts ir salūzis, un reizēm tas brauc nepareizā virzienā, tas ir, var gadīties, ka tā vietā, lai brauktu n stāvus uz augšu, tas aizbrauc n stāvus uz leju (un otrādi). Parādiet, kā ar salūzušo liftu profesors Cipariņš var nokļūt no 1. stāva uz savu kabinetu 314. stāvā, ja zināms, ka lifts nekad neaizbrauc nepareizi 7 reizes pēc kārtas, tas ir, ja tas ir sešas reizes pēc kārtas kļūdījies, tad septītajā tas noteikti aizbrauks pareizajā virzienā.

Piezīme. Lifts nebrauc zemāk par 1. un augstāk par 500. stāvu. Ja, piemēram, tam jābrauc no 3. stāva 5 stāvus uz leju, tas aizbrauc līdz 1. stāvam un tur apstājas.

Atrisinājums. Vispirms ar liftu vajag uzbraukt 100 stāvus uz augšu līdz 101. stāvam, to var izdarīt atkārtoti ievadot $n = 100$ un spiežot <uz augšu>, vismaz vienā no pirmajām septiņām reizēm tas brauks uz augšu.

Tālāk parādīsim, kā ar šo liftu var uzbraukt 1 stāvu uz augšu. Tad, šo atkārtoti izmantojot, varēsim nokļūt līdz jebkuram stāvam.

Ievadīsim 1 un nospiedīsim <uz augšu>:

- ja lifts uzbrauks uz augšu, tad esam klāt.
- ja nē, tad tas nobrauks 1 stāvu uz leju, un tad ievadīsim 2 un nospiedīsim <uz augšu>:
  - ja lifts uzbrauks uz augšu, tad esam klāt,
  - ja nē, tad tas nobrauks 2 stāvus uz leju (kopā jau esam 3 stāvus uz leju), un tad ievadīsim 4 un nospiedīsim <uz augšu>:
    - ja lifts uzbrauks uz augšu, tad esam klāt,
    - ja nē, tad tas nobrauks 4 stāvus uz leju (kopumā jau esam 7 stāvus uz leju), un tad ievadīsim 8 un nospiedīsim <uz augšu>:
      - ja lifts uzbrauks uz augšu, tad esam klāt,
      - ja nē, tad tas nobrauks 8 stāvus uz leju (kopumā jau esam 15 stāvus uz leju), un tad ievadīsim 16 un nospiedīsim <uz augšu>:
        - ja lifts uzbrauks uz augšu, tad esam klāt,
        - ja nē, tad tas nobrauks 16 stāvus uz leju (kopumā jau esam 31 stāvu uz leju), un tad ievadīsim 32 un nospiedīsim <uz augšu>:
          - ja lifts uzbrauks uz augšu, tad esam klāt,
          - ja nē, tad tas nobrauks 32 stāvus uz leju (kopumā jau esam 63 stāvus uz leju), un tad ievadīsim 64 un nospiedīsim <uz augšu>. Tā kā iepriekšējās 6 reizes lifts ir aizbraucis pretējā virzienā, tad tagad tas noteikti brauks uz augšu un mēs nokļūsim tieši vienu stāvu uz augšu no sākotnējā.

12.5. Zināms, ka naturāli skaitļi x un y ir tādi, ka $x^2 + y^2 + 1$ dalās ar 13. Pierādīt: **a)** $x^2 - y^2$ nedalās ar 13, **b)** tieši viens no skaitļiem $x^4,\ y^4,\ x^4 + y^4 + 1$ dalās ar 13.

Atrisinājums. Apskatām, kādi atlikumi rodas, ja naturāla skaitļa kvadrātu dala ar 13.

$n \pmod{13}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n^2 \pmod{13}$	0	1	4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	1

Tā kā pēc dotā $x^2 + y^2 + 1$ dalās ar 13, tad secinām, ka $x^2 + y^2 = 12 \pmod{13}$. Ievērojam, ka ir tikai divi skaitļa kvadrātu atlikumu pāri, kas summā dod 12, tie ir $(0; 12)$ vai $(3; 9)$.

a) Apskatot abus gadījumus, redzams, ka nevienā no tiem $x^2 - y^2$ nedalās ar 13.

b) Apskatām abus gadījumus.

- Ja atlikumu pāris ir $(0; 12)$, tad tieši viens (tas skaitlis, kurš dod atlikumu 0) no skaitļiem x^4 vai y^4 dalās ar 13, bet otrs nedalās, un $x^4 + y^4 + 1 \equiv 0 + 12^2 + 1 \equiv (-1)^2 + 1 \equiv 2 \pmod{13}$, tātad šajā gadījumā tieši viens no skaitļiem $x^4,\ y^4,\ x^4 + y^4 + 1$ dalās ar 13.
- Ja atlikumu pāris ir $(3; 9)$, tad $x^4 \equiv 3^2 \equiv 9 \pmod{13}$ un $y^4 \equiv 9^2 \equiv 81 \equiv 3 \pmod{13}$, bet tādā gadījumā $x^4 + y^4 + 1 \equiv 3 + 9 + 1 \equiv 0 \pmod{13}$, līdz ar to tieši viens no skaitļiem $x^4,\ y^4,\ x^4 + y^4 + 1$ dalās ar 13.