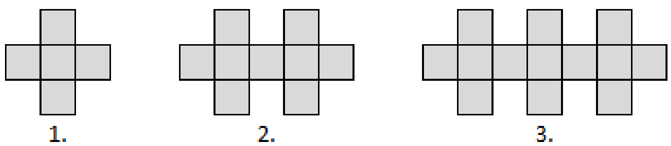
Latvijas 70. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi un atrisinājumi

5.-8. klase

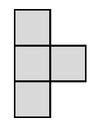
5.1. Doti četri trīsciparu skaitļi $\overline{xzy}$; $\overline{yaz}$; $\overline{yax}$; $\overline{zxa}$ un zināms, ka a, x, y, z ir dažādi cipari. Vai var būt, ka $\overline{xzy} < \overline{yaz} < \overline{yax} < \overline{zxa}$?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka šajā virknē katrs nākamais skaitlis ir lielāks nekā iepriekšējais. Lielāks ir tas skaitlis, kuram lielāks ir vecākās šķiras cipars. Aplūkojot pirmo, otro un ceturto skaitli, iegūstam, ka $x < y < z$. Salīdzinot otro un trešo skaitli, iegūstam $z < x$. Iegūta pretruna, tātad nevar būt, ka šajā virknē katrs nākamais skaitlis ir lielāks nekā iepriekšējais.

5.2. Valentīns savā burtnīcā zīmē figūras, pirmās trīs no tām parādītas 1. att. Pirmā figūra sastāv no pieciem vienādiem kvadrātiem un tās perimetrs ir 12 cm. Katru nākamo figūru Valentīns iegūst, iepriekšējai figūrai labajā pusē piezīmējot klāt vienu 2. att. doto figūru.



1. att.



2. att.

a) No cik kvadrātiem sastāv 70. figūra?

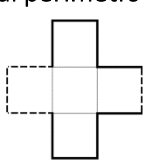
b) Nosaki 70. figūras perimetru!

c) Vai kādai no Valentīna zīmētajām figūrām perimetrs ir 1000 cm?

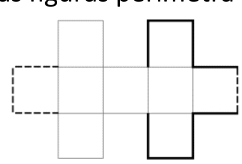
Atrisinājums. a) Ievērojam, ka, lai iegūtu nākamo figūru, iepriekšējai figūrai tiek pievienoti 4 kvadrāti. Pirmā figūrai sastāv no 5 kvadrātiem un vēl jāpievieno $69 \cdot 4$ kvadrāti, tātad 70. figūra sastāvēs no $5 + 276 = 281$ kvadrāta.

b) Ievērojam, ka pirmajai figūrai ir 12 vienādas malas, tātad katras malas garums ir 1 cm. Apskatām, kā mainās katras nākamās figūras perimetrs.

- Pirmajai figūrai perimetrs ir $P_1 = 12$ cm. Ievērojam, ka 12 var uzrakstīt kā $4 + 8$ (skat. 3. att., kur malu, kas iekrāsotas ar pārtrauktu līniju, kopējais garums ir 4 cm, bet ar biezāku līniju iekrāsoto malu kopējais garums ir 8 cm).
- Otrajai figūrai perimetrs ir $P_2 = 4 + 8 + 8 = 4 + 2 \cdot 8$ cm, jo pie pirmās figūras perimetra nāk klāt 8 malas (skat. 4. att., kur ar biezāku līniju iezīmētas malas, kas tiek pievienotas figūrai), kuru kopējais garums ir 8 cm.
- Trešajai figūrai perimetrs ir $P_3 = 4 + 2 \cdot 8 + 8 = 4 + 3 \cdot 8$ cm, jo pie otrās figūras perimetra nāk klāt 8 malas.



3. att.



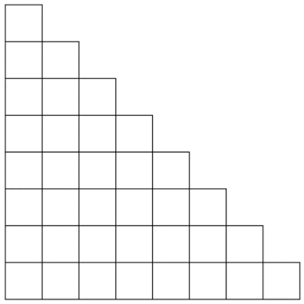
4. att.

Līdzīgi iegūst arī nākamo figūru perimetrus, katru reizi pieskaitot 8 cm. Līdz ar to figūras, kuras kārtas numurs ir n, perimetrs ir $P_n = 4 + n \cdot 8$ cm.

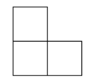
Tātad 70. figūras perimetrs ir $P_{70} = 4 + 70 \cdot 8 = 564$ cm.

c) Ievērojam, ja no figūras perimetra atņem 4, tad iegūtajam rezultātam jādalās ar 8. Tā kā $1000 - 4 = 996$ un $996 : 8 = 124, atl\ 4$ (nedalās ar 8), tad nav tādas figūras, kuras perimetrs ir 1000 cm.

5.3. Sagriez 5. att. doto figūru divpadsmit 6. att. figūrās!

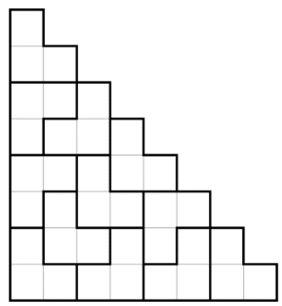


5. att.



6. att.

Atrisinājums. Skat., piemēram, 7. att.



7. att.

5.4. Dota tabula ar izmēriem 2×12 rūtiņas. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 24 (katrā rūtiņā cits skaitlis). Vai iespējams, ka rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstīto skaitļu starpība ir vismaz **a)** 11, **b)** 12?

Atrisinājums. a) Jā, prasītais ir iespējams, piemēram, skat. 8. att.

1	13	14	11	3	13	16	11	5	13	18	11	7	13	20	11	9	13	22	11	11	13	24
12		12		12		12		12		12		12		12		12		12		12		12
13	11	2	13	15	11	4	13	17	11	6	13	19	11	8	13	21	11	10	13	23	11	12

8. att.

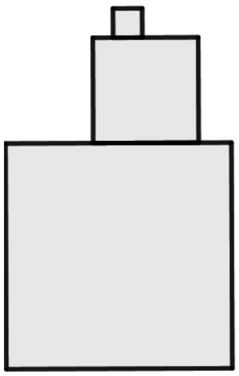
b) Pierādīsim, ka prasītais nav iespējams. Pieņemsim pretējo, ka iespējams aizpildīt tabulu. Ievērojam, ka katrai tabulas rūtiņai ir vismaz divas blakus rūtiņas (blakus rūtiņas ir rūtiņas, kurām ir kopīga mala), un aplūkosim to rūtiņu, kurā ierakstīts skaitlis 12. Šim skaitlim tikai viens no tabulā ierakstītajiem skaitļiem var nodrošināt starpību, kas ir vismaz 12, ir skaitlis 24. Esam ieguvuši pretrunu, tātad derīgs tabulas aizpildījums neeksistē.

5.5. Atrodi tādu trīsciparu skaitli, kam vienlaicīgi izpildās tālāk dotie nosacījumi! Šis skaitlis,

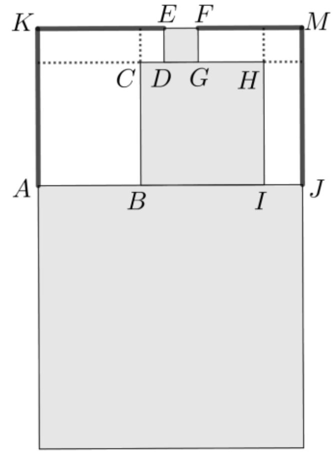
- dalot ar 2, atlikumā dod 1,
- dalot ar 3, atlikumā dod 2,
- dalot ar 4, atlikumā dod 3,
- dalot ar 5, atlikumā dod 4,
- dalot ar 6, atlikumā dod 5,
- dalot ar 7, atlikumā dod 6,
- dalot ar 8, atlikumā dod 7.

Atrisinājums. Ja meklētajam skaitlim pieskaitīsim 1, tad iegūtais skaitlis dalīsies ar 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 (bez atlikuma). Ievērojam, ka der skaitlis $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 840$, tas dalās ar 2; 3; 4; 5; 6; 7 un 8. Tātad meklētais skaitlis ir $840 - 1 = 839$.

6.1. Doti trīs kvadrāti ar laukumiem attiecīgi 1 m^2, 4 m^2 un 9 m^2. Kvadrāti salikti viens virs otra tā, kā parādīts 9. att. Aprēķini iegūtās figūras perimetru!



9. att.



10. att.

Atrisinājums. Kvadrātu malu garumi attiecīgi ir 1 m, 2 m un 3 m. Ievērojam, ka lauztās līnijas $ABCDE$ garums ir tāds pats kā lauztās līnijas AKE garums un lauztās līnijas $JIHGF$ garums ir tāds pats kā lauztās līnijas JMF garums (skat. 10. att.). Tad dotās figūras garums ir $1+2+3=6$ m un platums ir 3 m. Līdz ar to figūras perimetrs ir $(6+3)\cdot 2=18$ m.

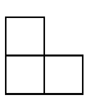
6.2. Atrodi skaitļa $1^3+3^3+5^3+\cdots+101^3$ pēdējo ciparu!

Atrisinājums. Lai atrastu dotās summas pēdējo ciparu, sagrupējam saskaitāmos un nosakām katras grupas summas pēdējo ciparu:

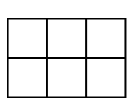
- summas $1^3+11^3+\cdots+101^3$ pēdējais cipars ir 1, jo ir vienpadsmit saskaitāmie un katra saskaitāmā pēdējais cipars ir 1;
- $3^3+13^3+\cdots+93^3$ pēdējais cipars ir 0, jo katra saskaitāmā pēdējais cipars ir 7, jo $3^3=27$, un pavisam ir 10 šādi saskaitāmie $7\cdot 10=70$.
- $5^3+15^3+\cdots+95^3$ pēdējais cipars ir 0, jo katra saskaitāmā pēdējais cipars ir 5, jo $5^3=125$, un pavisam ir 10 šādi saskaitāmie $5\cdot 10=50$.
- $7^3+17^3+\cdots+97^3$ pēdējais cipars ir 0, jo katra saskaitāmā pēdējais cipars ir 3, jo $7^3=343$, un pavisam ir 10 šādi saskaitāmie $3\cdot 10=30$.
- $9^3+19^3+\cdots+99^3$ pēdējais cipars ir 0, jo katra saskaitāmā pēdējais cipars ir 9, jo $9^3=729$, un pavisam ir 10 šādi saskaitāmie $9\cdot 10=90$.

Tātad uzdevumā dotā skaitļa pēdējais cipars ir 1.

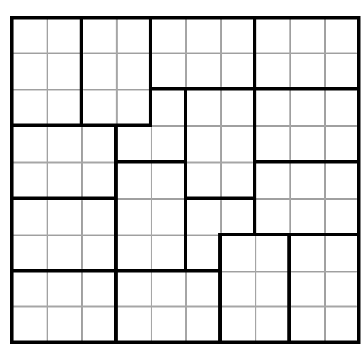
6.3. Izmantojot divas 11. att. un četrpadsmit 12. att. figūras, saliec taisnstūri ar izmēriem 10×9 tā, lai 11. att. figūras nesaskartos! Figūras drīkst pagriezt.



11. att.



12. att.



13. att.

Atrisinājums. Skat., piemēram, 13. att.

6.4. Dota tabula ar izmēriem 3×10 rūtiņas. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 30 (katrā rūtiņā cits skaitlis). Vai iespējams, ka rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstīto skaitļu starpība ir vismaz **a)** 14, **b)** 15?

Atrisinājums. a) Jā, prasītais ir iespējams, piemēram, skat. 14. att.

16	2	19	5	22	8	25	11	28	14
1	18	4	21	7	24	10	27	13	30
17	3	20	6	23	9	26	12	29	15

14. att.

b) Pierādīsim, ka prasītais nav iespējams. Pieņemsim pretējo, ka iespējams aizpildīt tabulu. Ievērojam, ka katrai tabulas rūtiņai ir vismaz divas blakus rūtiņas (blakus rūtiņas ir rūtiņas, kurām ir kopīga mala), un aplūkosim to rūtiņu, kurā ierakstīts skaitlis 15. Šim skaitlim tikai viens no tabulā ierakstītajiem skaitļiem var nodrošināt starpību, kas ir vismaz 15, ir skaitlis 30. Esam ieguvuši pretrunu, tātad derīgs tabulas aizpildījums neeksistē.

6.5. Sešciparu naturāliem skaitļiem katrs cipars aizstāts ar burtu tā, ka vienādi burti aizstāj vienādus ciparus, bet dažādi burti – dažādus ciparus. Zināms, ka trīs skaitļi, kam pēc aizstāšanas atbilst vārdi AGNESE, ASTERE un SNIEGS, visi dalās ar 8. Vai iespējams, ka skaitlis, kam atbilst vārds GRIEZE, dalās ar 8?

Atrisinājums. Skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8. Pieņemsim, ka visi skaitļi ESE, ERE, EGS un EZE dalās ar 8.

Ievērojam, ka ar 8 dalās tikai pāra skaitļi, tāpēc burtiem E un S atbilst pāra cipari.

No tā, ka skaitlis ESE dalās ar 8, iegūstam, ka burta E var vietā būt tikai 0, 4 vai 8, jo neviens no skaitļiem 202, 242, 262, 282, 606, 626, 646, 686 nedalās ar 8 (neviens no tiem nedalās ar 4, tātad nedalās arī ar 8).

Apskatām visus iespējamos gadījumus.

- Ja ar E ir aizstāts cipars 0 vai 8, tad trīsciparu skaitļu, kas sākas un beidzas ar E un dalās ar 8, vidējais cipars var būt tikai 0, 4 vai 8. Tā kā E jau izmanto vienu no cipariem 0 vai 8, tad iespējami tikai divi varianti. Pēc dotā ESE un ERE atbilstošie skaitļi dalās ar 8, tāpēc EZE atbilstošais skaitlis nevar dalīties ar 8.
- Ja ar E aizstāts cipars 4, tad trīsciparu skaitļu, kas sākas un beidzas ar E un dalās ar 8, vidējais cipars var būt tikai 2 un 6. Arī šajā gadījumā iespējami tikai divi varianti 424 un 464. Pēc dotā ESE un ERE atbilstošie skaitļi dalās ar 8, tāpēc EZE atbilstošais skaitlis nevar dalīties ar 8.

Līdz ar to esam pamatojuši, ka skaitlis, kam atbilst vārds GRIEZE, nedalās ar 8.

Piezīme. Viens derīgs skaitļu komplekts iegūstams, ja burtus aizvieto šādi: A=9, G=2, N=3, E=0, S=4, T=6, R=8, I=5, Z=1 (der arī Z=7). Tādā gadījumā vārdam AGNESE atbilst skaitlis 923040, ASTERE - 946080, SNIEGS - 435024 un GRIEZE - 285010.

7.1. Dota taisne $y = 2019x - 2020$. Uzraksti vienādojumu taisnei, kas iet caur punktu $(14; -2006)$ un krusto doto taisni punktā, kura abscisa ir 0.

Atrisinājums. Meklētās taisnes vienādojums ir formā $= kx + b$, kur $k \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. Sākumā atrodam ordinātu punktam, kurā meklētā taisne krusto doto taisni $y = 2019 \cdot 0 - 2020 = -2020$. Tātad meklētā un dotā taisne krustojas punktā $(0; -2020)$. Līdz ar to $b = -2020$. Tā kā meklētā taisne iet caur punktu $(14; -2006)$, tad iegūstam vienadojumu $-2006 = 14k - 2020$ jeb $k = 1$. Tātad meklētās taisnes vienādojums ir $y = x - 2020$.

7.2. Uz tāfeles rindā uzrakstīti nepāra skaitļi 1; 3; 5; ...; 2021; 2023. Katram no tiem priekšā pierakstīja vai nu „+”, vai „–” zīmi. Vai var gadīties, ka iegūtās izteiksmes vērtība ir **a)** 4; **b)** 1?

Atrisinājums. a) Jā, iegūtās izteiksmes vērtība var būt 4. Apskatām četrus pēc kārtas esošus naturālus nepāra skaitļus $2n - 1; 2n + 1; 2n + 3; 2n + 5$. Ievērojam, ka katram no tiem var pierakstīt priekšā vai nu „+”, vai „–” zīmi tā, lai iegūtu summu 0:

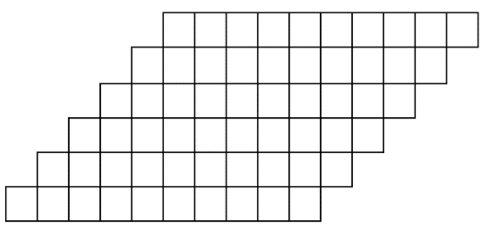
$$+(2n - 1) - (2n + 1) - (2n + 3) + (2n + 5) = 0$$

Pavisam uz tāfeles ir uzrakstīti 1012 skaitļi. Sagrupējam skaitļus no 9 līdz 2023 grupās pa četri tā, lai katrā grupā esošo skaitļu summa būtu 0, bet skaitļiem 1; 3; 5; 7 priekšā liekam attiecīgi „$-\ +\ -\ +$”:

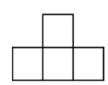
$$\underbrace{-1 + 3 - 5 + 7}_{=4}\ \underbrace{+9 - 11 - 13 + 15}_{=0}\ + \ldots\ \underbrace{+2017 - 2019 - 2021 + 2023}_{=0} = 4.$$

b) Nē, nevar iegūt vērtību 1. Tā kā uz tāfeles ir uzrakstīts pāra skaits (1012 skaitļi) nepāra skaitļu, tad to summa būs pāra skaitlis, jo, saskaitot vai atņemot divus nepāra skaitļus, iegūst pāra skaitli.

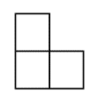
7.3. Vai 15. att. figūru var pārklāt ar **a)** piecpadsmit 16. att. figūrām, **b)** trīs 16. att. figūrām un divpadsmit 17. att. figūrām? Figūras drīkst pagriezt.



15. att.

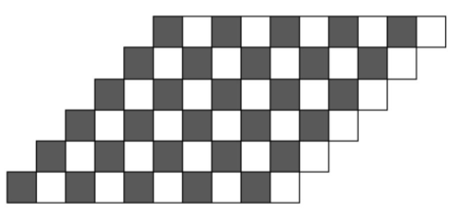


16. att.

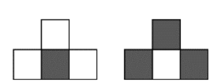


17. att.

Atrisinājums. a) Nē, nevar. Dotajā figūrā kopā ir 60 rūtiņas, bet vienā figūrā ir 4 rūtiņas. Tātad, ja uzdevuma prasības varētu izpildīt, figūra būtu noklāta ar tieši 15 figūrām. Izkrāsojam figūru šaha galdiņa veidā (skat. 18. att.); pavisam melnā krāsā ir nokrāsotas 30 (pāra skaits) rūtiņas. Lai kā arī šajā figūrā tiktu novietota 16. att. figūra, tā noklās vai nu tieši vienu melnu rūtiņu, vai tieši 3 melnas rūtiņas (skat. 19. att.), tātad nepāra skaita melnas rūtiņas. Tāpēc arī 15 (nepāra skaitlis) šādas figūras kopā var noklāt tikai nepāra skaita melnas rūtiņas. Tā kā nepāra skaitlis nevar būt vienāds ar pāra skaitli – melno rūtiņu skaitu visā figūrā, tad figūru pilnībā pārklāt nevar.



18. att.



19. att.

b) Nē, nevar pārklāt. Dotā figūra satur 60 rūtiņas, bet $3 \cdot 4 + 12 \cdot 3 = 12 + 36 = 48 < 60$.

Piezīme. a) gadījumā pierādīt, ka figūru nevar pārklāt, var arī, piemēram, apskatot apakšējo kreiso rūtiņu, kuru var pārklāt vienā vienīgā veidā, un pamatojot, ka arī tālākais pārklājums ir noteikts viennozīmīgi.

7.4. Dota tabula ar izmēriem $2 \times n$ rūtiņas, kurā katrā rūtiņā ierakstīts viens naturāls skaitlis no 1 līdz $2n$ (katrā rūtiņā cits skaitlis) tā, ka rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstīto skaitļu starpība ir vismaz K, (kur K ir naturāls skaitlis). Kādai lielākajai K vērtībai tas ir iespējams (izsaki atbildi atkarībā no n vērtības)?

Atrisinājums. Lielākā iespējamā K vērtība ir $n-1$, atbilstošu tabulas aizpildījumu skat. 20. att., kur blakus rūtiņās (blakus rūtiņas ir rūtiņas, kurām ir kopīga mala) pa vertikāli ierakstīto skaitļu starpība ir n, bet pa horizontāli starpība ir $n+1$ vai $n-1$.

1	$n+1$	$n+2$	$n-1$	3	$n+1$	$n+4$	$n-1$	…	$n+1$	$2n-1$	$n-1$	n
n		n		n		n				n		n
$n+1$	$n-1$	2	$n+1$	$n+3$	$n-1$	4	$n+1$	…	$n-1$	$n-1$	$n+1$	$2n$

20. att.

Pamatosim, ka K nevar būt vienāds ar n vai lielāks nekā n. Pieņemsim pretējo, ka $K \geq n$. Ievērojam, ka katrai tabulas rūtiņai ir vismaz divas blakus rūtiņas, un aplūkojam to rūtiņu, kurā ir ierakstīts skaitlis N. Šim skaitlim tikai viens no tabulā ierakstītajiem skaitļiem var nodrošināt starpību, kas ir vismaz n, tas ir skaitlis $2n$. Iegūta pretruna, tātad derīgs tabulas aizpildījums šajā gadījumā neeksistē.

7.5. Atrodi tādu naturālu skaitli n, ka skaitļa $11n$ ciparu summa ir vismaz 11 reizes mazāka nekā skaitļa n ciparu summa!

Atrisinājums. Der, piemēram, skaitlis $n = 909091$ (ciparu summa ir 28), jo $11n = 10000001$ (ciparu summa ir 2) un $\frac{28}{2} = 14 > 11$.

Piezīme. Prasīto skaitli var atrast, izmantojot dalāmības pazīmi ar 11 un ievērojot, ka skaitlis $1\underbrace{00\ldots00}_{\text{pāra skaits } 0}1$ dalās ar 11.

8.1. Profesoram Cipariņam ir airu laiva. Profesors stāvošā ūdenī airē ar ātrumu 7 km/h. Vienu dienu viņš nolēma doties braucienā pa vietējo upi. Izbraucot no mājām, profesors brauca 8 stundas pret straumi, līdz nokļuva kādā atpūtas vietā. Vēlāk, kad bija atpūties, profesors devās atpakaļ mājās. Pēc 4 stundu airēšanas viņu izbiedēja skaļš putna kliedziens un viņš no rokām izlaida airus, kas iekrita ūdenī. Atlikušo ceļa gabalu laivu nesa straume. Aprēķini straumes ātrumu, ja zināms, ka profesors Cipariņš ceļā uz atpūtas vietu pavadīja par 2 stundām vairāk nekā atpakaļceļā!

Atrisinājums. Ar x apzīmējam upes straumes ātrumu. Izmantojot uzdevumā doto, aizpildām tabulu.

	$\boldsymbol{v}$, km/h	$\boldsymbol{t}$, h	$\boldsymbol{s}$, km
Pret straumi	$7-x$	8	$8(7-x)$
Pa straumi (airējot)	$7+x$	4	$4(7+x)$
Pa straumi (bez airiem)	x	2	$2x$

Tā kā turpceļā un atpakaļceļā veiktais attālums ir viens un tas pats, tad iegūstam vienādojumu:

$$8(7-x)=4(7+x)+2x$$
$$56-8x=28+4x+2x$$
$$14x=28$$
$$x=2.$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka upes straumes ātrums ir 2 km/h.

8.2. Dīvainam kalkulatoram ir tikai divas pogas: “P”, kas uz ekrāna redzamo skaitli palielina par pieci, un “S”, kas uz ekrāna redzamo skaitli palielina par septiņi. Ieslēdzot kalkulatoru, uz ekrāna redzams skaitlis 0. Kāds ir lielākais naturālais skaitlis, kuru nevar iegūt uz kalkulatora ekrāna?

Atrisinājums. Pierādīsim, ka lielākais skaitlis, ko nevar iegūt uz ekrāna, ir 23.

Ievērojam, ka vienīgie skaitļi, kas mazāki nekā 15 un ko iespējams iegūt ar pogu nospiedieniem, ir 5 (P), 7 (S), 10 (PP), 12(PS) un 14 (SS).

Lai uz ekrāna iegūtu skaitli 23, iepriekšējam skaitlim jābūt vai nu 18, vai 16 un pirms tam ir bijis jābūt kādam no skaitļiem 13, 11 vai 9, bet šādus skaitļus nav iespējams iegūt. Līdz ar to arī 23 nav iespējams iegūt.

Pierādīsim, ka visus skaitļus, kas lielāki nekā 23, ir iespējams iegūt. Ievērojam, ka uz ekrāna var iegūt piecus secīgus skaitļus:

- $24=2\cdot5+2\cdot7$ (PPSS);
- $25=5\cdot5$ (PPPPP);
- $26=1\cdot5+3\cdot7$ (PSSS);
- $27=4\cdot5+1\cdot7$ (PPPPS);
- $28=4\cdot7$ (SSSS).

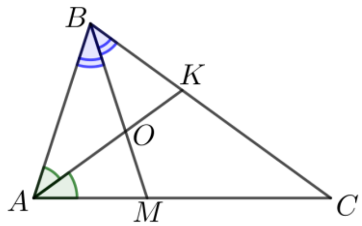
Katru no skaitļiem, kas lielāks nekā 28, var iegūt no kāda no skaitļiem 24; 25; 26; 27; 28, nospiežot pogu “P” vajadzīgo reižu skaitu.

8.3. Trijstūrī ABC novilktas bisektrises AK un BM. Zināms, ka $AK=BM=AB$. Aprēķini trijstūra ABC leņķus!

Atrisinājums. Trijstūris ABM ir vienādsānu, jo $AB=BM$ (pēc dotā), tāpēc apzīmējam $\sphericalangle BAM=\sphericalangle BMA=2\alpha$ un pēc bisektrises definīcijas $\sphericalangle BAK=\alpha$ (skat. 21. att.). Tā kā trijstūra ABM virsotnes leņķis $\sphericalangle ABM=180°-4\alpha$, tad $\sphericalangle ABK=2\sphericalangle ABM=360°-8\alpha$. Ievērojam, ka

- $\sphericalangle AKB=\frac{1}{2}(180°-\sphericalangle BAK)=\frac{180°-\alpha}{2}$;
- $\sphericalangle AKB=\sphericalangle ABK=360°-8\alpha$.

Līdz ar to iegūstam vienādojumu $\frac{180°-\alpha}{2}=360°-8\alpha$, no kā izriet, ka $180°-\alpha=720°-16\alpha$ jeb $\alpha=540°:15=36°$. Tātad trijstūra ABC leņķu lielumi ir $\sphericalangle BAC=36°\cdot2=72°$, $\sphericalangle ABC=360°-8\cdot36°=72°$ un $\sphericalangle ACB=180°-2\cdot72°=36°$.



21. att.

8.4. Dota tabula ar izmēriem $3 \times 2n$ rūtiņas, kurā katrā rūtiņā ierakstīts viens naturāls skaitlis no 1 līdz $6n$ (katrā rūtiņā cits skaitlis) tā, ka rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstīto skaitļu starpība ir vismaz K (kur K ir naturāls skaitlis). Kādai lielākajai K vērtībai tas ir iespējams (izsaki atbildi atkarībā no n vērtības)?

Atrisinājums. Lielākā iespējamā K vērtība ir $3n - 1$.

Pieņemsim pretējo, ka $K \geq \frac{6n}{2} = 3n$. Ievērojam, ka katrai tabulas rūtiņai ir vismaz divas blakus rūtiņas (blakus rūtiņas ir rūtiņas, kurām ir kopīga mala), un aplūkojam to rūtiņu, kurā ierakstīts skaitlis $3n$. Šim skaitlim tikai viens no tabulā ierakstītajiem skaitļiem var nodrošināt starpību, kas ir vismaz $3n$, tas ir skaitlis $6n$. Esam ieguvuši pretrunu, tātad derīgs tabulas aizpildījums ar $K \geq 3n$ neeksistē.

Ja $K = 3n - 1$, tad tabulu var aizpildīt, piemēram, kā parādīts 22. att., kur blakus rūtiņās ierakstīto skaitļu starpības periodiski atkārtojas.

$\mathbf{3n+1}$	$3n-1$	$\mathbf{2}$	$3n+2$	$\mathbf{3n+4}$	$3n-1$	$\mathbf{5}$	$3n+2$	...	$3n+2$	$\mathbf{6n-2}$	$3n-1$	$\mathbf{3n-1}$
$3n$		$3n+1$		$3n$		$3n+1$				$3n$		$3n+1$
$\mathbf{1}$	$3n+2$	$\mathbf{3n+3}$	$3n-1$	$\mathbf{4}$	$3n+2$	$\mathbf{3n+6}$	$3n-1$	...	$3n-1$	$\mathbf{3n-2}$	$3n+2$	$\mathbf{6n}$
$3n+1$		$3n$		$3n+1$		$3n$				$3n+1$		$3n$
$\mathbf{3n+2}$	$3n-1$	$\mathbf{3}$	$3n+2$	$\mathbf{3n+5}$	$3n-1$	$\mathbf{6}$	$3n+2$	...	$3n+2$	$\mathbf{6n-1}$	$3n-1$	$\mathbf{3n}$

22. att.

8.5. Dotas 8 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Ir zināms, ka vai nu visām tām masas ir vienādas, vai arī 4 monētām ir viena masa, bet 4 monētām – cita masa. Kā ar 2 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem var noskaidrot, kura no iespējām pastāv īstenībā?

Atrisinājums. Pirmajā svēršanā uz katra svaru kausa uzliekam pa 3 monētām. Iespējami divi gadījumi.

1. Ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad ir divu dažādu masu monētas.
2. Svaru kausi ir līdzsvarā, tas ir iespējams divos gadījumos, ja
   - visu 6 svērto monētu masas ir vienādas, tātad arī nesvērto monētu masas ir vienādas (un arī vienādas ar svērto monētu masu);
   - uz katra svaru kausa ir divas monētas ar masu x un viena monēta ar masu y, tātad katras nesvērtās monētas masa ir y.

Otrajā svēršanā paņemam divas monētas no viena svaru kausa noliekam malā un to vietā svaru kausā ieliekam abas nesvērtās monētas. Iespējami divi gadījumi.

1. Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad visām 8 monētām ir vienāda masa.
2. Ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad ir divu dažādu masu monētas.