

Punktiņš. (A Grupa) Seifi un kodi

20.02.2020

Nodarbības mērķis: Atkārtot kombinatoriskus elementu skaita aprēķināšanas paņēmienus; veikt loģiskus spriedumus; pielietot naturālo skaitļu dalāmības īpašības; veidot kombinācijas.

1. Seifa atslēgas vārds izveidots no burtiem *grghoremo*. Alfrēds kodu aizmirsis, bet atceras, ka kods sākas ar *m* un beidzas ar *h* un vienādie burti ir tieši blakus. Cik koda variantus no burtiem viņš var sastādīt?

Atrisinājums. Ja Alfrēds zina pirmo un pēdējo koda burtus, tad jāizdomā, kā izvietot pārējos 7 burtus:

$m _ _ _ _ _ _ _ h$

Burts *e* nevar būt koda trešais, piektais un septītais burts, jo tad kāds no vienādo burtu pāriem nebūs blakus:

$m _ x _ x _ x _ h$

Seko, ka *e* burtu var ierakstīt vienā no 4 vietām.

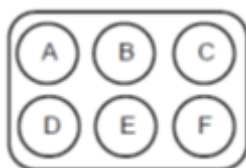
$m e _ _ _ _ _ h; m _ _ e _ _ _ _ h; m _ _ _ _ e _ _ h; m _ _ _ _ _ _ e h$

Atlikušajās 6 pozīcijās jāizvieto *gg, oo, rr*. No šiem trīs pāriem var izveidot 6 secības

ggoorr; ggrroo; oorrgg; oogrrr; rrggoo; rroogg

Kopumā var izveidot $4 \cdot 6 = 24$ dažādas burtu kombinācijas.

2. Zagļi ir iecerējuši ieiet kādā namā. Pie durvīm ir kodu plāksnīte. Ir jānoskaidro - cik dažādi varianti iespējami, ja vienlaikus jānospiež divi taustiņi? Trīs taustiņi?



Atrisinājums. a) Lai vienlaikus nospiestu divus taustiņus, jānoskaidro, kādu taustiņu pārus var izvēlēties. Var izveidot visu pāru sarakstu:

AB BC CD DE EF
AC BD CE DF
AD BE CF
AE BF
AF

Var jautājumu risināt arī citādi: katrs burts ietilpst piecos pāros ar citiem burtiem, bet tādā gadījumā katrs pāris ir uzskaitīts divas reizes. Tāpēc visu pāru skaitu var aprēķināt:

$$\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

b) Lai vienlaikus nospiestu 3 taustiņus, jāveido burtu kombinācijas no trim burtiem. Pie katra burtu pāra (skat. a) gadījumu) jāpieliek viens no atlikušajiem 4 burtiem, kas veidos kombinācijas no trim burtiem. Ja šādi aplūko visus 15 burtu pārus, tad katra no 3 burtu kombinācijām ir apskatīta 3 reizes. Tad trīs burtu kombināciju skaitu var aprēķināt:

$$\frac{15 \cdot 4}{3} = 20$$

3. Seifa kods ir 4 – ciparu skaitlis, kas dalās gan ar 8, gan 9. Koda pirmie divi cipari, kā arī pēdējie divi ir izveidoti no secīgiem cipariem. Mēģini noskaidrot kodu!

Atrisinājums. Skaitlis dalās ar 8, ja tā pēdējie 3 cipari veido trīsciparu skaitli, kurš dalās ar 8. Koda pēdējie divi cipari veido pārskaitli no diviem secīgiem cipariem. Apskatām secīgo ciparu pārus: (0; 1), (1; 2), (2; 3), (3; 4), (4; 5); (5; 6); (6; 7), (7; 8), (8; 9). Kopumā ir 9 pāri, tātad no tiem var izveidot 9 dažādus divciparu pārskaitļus, kas būs koda pēdējie divi cipari. Otrs skaitļu pāris ir jāatrod tāds, lai koda ciparu summa dalās ar 9. Pakāpeniski sākam pārbaudīt katru skaitļu pāri. Ievērosim, ka ciparu summai abos skaitļu pāros kopumā ir jābūt 18, jo katra skaitļu pāra summa ir nepāra skaitlis.

No pāriem (0; 1) un (8; 9) var izveidot 3 kodus: 8910; 9810; 1098. Katrs no šiem skaitļiem dalās ar 9, bet nedalās ar 8.

Apskatām pārus (1; 2) un (7; 8). Var izveidot 4 kodus: 7812; 8712; 1278; 2178. No šiem skaitļiem tikai viens skaitlis dalās ar 8. Kods varētu būt 8712.

Līdzīgi atrodam arī citus iespējamus četr ciparu kodus. Iespējamie kodu ir

$$8712; 2376; 7632; 3456.$$

4. Seifa atslēga sastāv no 3 cipariem, kur katrs no tiem var būt no 0 līdz 5. Seifs ir sabojāts un tādēļ tas atveras tad, ja kaut kādi 2 cipari (nav zināms, tieši kuri divi) sakrīt ar pareizajiem. Kāds ir mazākais ciparu kombināciju skaits, kas jāizmēģina, lai noteikti atvērtu seifu?

Atrisinājums. Katra koda cipara vietā var būt viens no sešiem cipariem. Tāpēc visu iespējamo variantu skaits no šiem cipariem ir aprēķināms sekojošā veidā: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Sliktākajā gadījumā būtu jāveic 216 mēģinājumi, lai uzzinātu kodu, ja seifs nebūtu sabojāts.

Jautājums – vai, rīkojoties gudrāk, seifa kodu var atrast ātrāk? Varētu pārbaudīt tikai 2 ciparus. Pieņemsim, ka zinām divus pareizos ciparus. Ja abi cipari vienādi, piemēram, a un a , tad tie varētu būt izvietoti 3 variantos:

$$a a _ \quad a _ a \quad _ a a$$

Ja abi zināmie cipari dažādi, tad tos trīs skaitļu kombinācijā iespējams izvietot 6 veidos:

$$a b _ \quad b a _ \quad a _ b \quad b _ a \quad _ a b \quad _ b a$$

Pirmajā gadījumā jāpārbauda $3 \cdot 6 = 18$ varianti, a vietā izvēloties vienu no sešiem cipariem. Ja seifs neatveras, tad var secināt, ka visi 3 koda cipari dažādi.

Otrajā gadījumā divus skaitļus no sešiem var izvēlēties $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ veidos. Iespējamo koda pārbaudes variantu skaits tad ir $15 \cdot 6 = 90$. Vissliktākajā gadījumā ir jāizmēģina 108 varianti, lai atvērtu seifu.

5. Policisti arestēja ļoti lielu gangsteru bandu – vairāk kā 100 personas. Viņus pa vienam ieveda lielā telpā, lai reģistrētu. Kāds varētu būt to gangsteru minimālais skaits, kuri ievesti telpā, lai noteikti varētu pateikt, ka ir vismaz 3 gangsteri, kuriem ir viens un tas pats dzimšanas mēnesis vai arī ir vismaz 3, kuriem dzimšanas mēneši ir pēc kārtas?

Atrisinājums. Gadā ir 12 mēneši. Ja 100 personām sastādām sarakstu, kurā mēnesī katrs ir dzimis, tad kādā vienā mēnesī būs dzimuši vismaz 9 cilvēki, jo $100:12 = 8 \text{ atl. } 4$. Cik gangsteri varētu būt telpā, lai nekādi trīs no viņiem nebūtu dzimuši vienā mēnesī? Lielākais 24 gangsteri, kur katrā mēnesī ir dzimuši divi no viņiem. Bet tad būs ne tikai 3, bet pat 12, kas dzimuši 12 mēnešos pēc kārtas. Lai tā nebūtu, jāpieņem, ka gangsteri dzimuši janvārī, martā, maijā, jūlijā, septembrī, novembrī (vai arī pārējos 6 mēnešos). Tad lielākais skaits gangsteru, kuriem neizpildās uzdevuma prasības, ir 12. Ja telpā ienāks 13 gangsteri, tad gadīsies, ka vai nu vienā mēnesī dzimuši 3 no viņiem, vai arī atrodami ir 3 gangsteri, kas dzimuši 3 mēnešos pēc kārtas.

6. Mafijas krusttēvam radusies sarežģīta problēma. Viņš grib uzticēt sava seifa kodu četriem saviem tuvākajiem palīgiem, bet tā, lai neviens no viņiem vienatnē, bet arī nekādi divi no viņiem divatā nevarētu zināt pilnu kodu, bet kodu zinātu jebkuri 3 palīgi. Kāds varētu būt visīsākais koda garums?

Piezīme. Atsevišķi vajag aplūkot gadījumus, kad ir 4, 5 vai 6 burti. Katru gadījumu jāizpēta atsevišķi.

Atrisinājums. Skaidrs, ka ar diviem vai trīs burtiem nepietiek.

Apskatīsim gadījumu, ja seifa koda garums ir 4 burti. Ja katram palīgam pasaka vienu burtu, tad nekādi trīs palīgi nezina visus 4 burtus. Ja katram palīgam pasaka 2 burtus, tad var gadīties, ka divi palīgi zina visu kodu. Divu burtu kombinācijas ir

ab, ac, ad, bc, bd, cd.

Viena otru papildinošās kombinācijas ir (*ab* un *cd*), (*ac* un *bd*), (*ad* un *bc*). Ievērojot, ka ir 4 palīgi, diviem no tiem būs jāpasaka kombinācijas, kuras viena otru papildina (tad ir zināmi visi 4 burti) vai arī divas vienādas kombinācijas, bet ne katri 3 palīgi varēs atvērt seifu (piemēram, *ab, ab, bc* kombinācijā nav zināms burts *d*).

Vai kods var sastāvēt no 5 burtiem? Ja katram palīgam pasaka 2 burtus, tad var gadīties, ka būs kādi 3 palīgi, kuri kopumā zinās ne vairāk kā 4 burtus. Ja ir divu burtu informācija katram palīgam, tad ir divi tādi palīgi, kuri zina vienu un to pašu burtu (otrs burts var atšķirties). Līdz ar to trešajam palīgam ir jāzina divi atlikušie burti, kas nozīmē – diviem palīgiem ir jāsniedz vienāda informācija. Ja ir divi palīgi, kas zina vienu un to pašu informāciju, tad kopā ar trešo personu viņi zinās tikai 4 burtus. Līdzīgi spriež par situāciju, ja katram palīgam pasaka 3 burtus no pieciem koda burtiem.

No 5 burtiem var izveidot 10 kombinācijas pa 3 burtiem:

abc; abd; abe; acd; ace; ade; bce; bde; cde

Jāseko, lai nekādi divi palīgi nevar atvērt seifu divatā – tas nozīmē, ja kādam pateiks burtu kombināciju *abc*, tad nevienam citam nevarēs pateikt *ade; bde* un *cde*. Vienlaikus nevar pateikt arī *abd* un *ace* vai *bce*, tāpat vienlaikus nevar būt pateikta informācija *abe* un *acd* vai *bcd*. Tad paliek tikai trīs burtu kombinācijas, kuras var pateikt palīgiem, jāsecina, ka diviem palīgiem būtu jāpasaka vienāda informācija, bet tad var gadīties, ka kādi trīs palīgi nezina visus seifa koda burtus. (Padomā, kāpēc palīgiem nevar teikt 4 burtu kombinācijas!)

Krusttēvam ir jāizvēlas 6 koda burti. Katram no palīgiem viņš var pateikt 3 burtus. Attēlosim to shematiski (sarkanā krāsā ir tas burts, ko divi palīgi satiekoties nezina):

