

## Senioru IMO treniņš 3

Šis ir neobligātais treniņš senioru nodarbību dalībniekiem (piedalīties var jebkurš interesēts). Katras divas nedēļas (svētdien) tiks publicēta šāda izlase ar uzdevumiem, uzdevumu sarežģītība ir aptuveni IMO līmeņa uzdevumi vai mazliet vieglāk. Šoreiz ir 4 uzdevumi, pa 1 no katras nozares (ģeometrija, algebra, skaitļu teorija, kombinatorika). Risinājumus vai jautājumus sūtīt uz [jevgenijs.vihrovs@lu.lv](mailto:jevgenijs.vihrovs@lu.lv) līdz (sestdienai) 06.06. 23:59. Katrs uzdevums tiek vērtēts līdz 7 punktiem. Rezultāti tiks publicēti NMS mājaslapā.

**1. uzdevums.** Dots naturāls skaitlis  $k \geq 2$ . Atrast visus naturālu skaitļu komplektus  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , kuriem izpidās

$$n_2 \mid 2^{n_1} - 1, \quad n_3 \mid 2^{n_2} - 1, \quad \dots, \quad n_k \mid 2^{n_{k-1}} - 1, \quad n_1 \mid 2^{n_k} - 1.$$

**2. uzdevums.** Dots šaurleņķu trijstūris  $ABC$ , kur  $D, E, F$  ir pamati augstumiem no virsotnēm  $A, B, C$ , attiecīgi. Taisnes  $BC$  un  $EF$  krustojas punktā  $P$ . Taisne, kas iet caur  $D$  un ir paralēla  $EF$ , krusto taisnes  $AC$  un  $AB$  punktos  $Q$  un  $R$ , attiecīgi. Pierādīt, ka ap trijstūri  $PQR$  apvilktā riņķa līnija daļa nogriežni  $BC$  uz pusēm.

**3. uzdevums.** Doti naturāli skaitļi  $a, b$  un  $c$  ar  $a < b < c$ . Funkcija  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tiek definēta ar:

- $f(n) = n - a$ , ja  $n > c$ ;
- $f(n) = f(f(n + b))$ , ja  $n \leq c$ .

Noteikt, cik funkcijai  $f$  var būt nekustīgo punktu (aprakstīt visas iespējas). (Funkcijas  $g$  argumentu  $x$  sauc par nekustīgo punktu, ja  $g(x) = x$ .)

**4. uzdevums.** Doti naturāli skaitļi  $m$  un  $n$ , un  $m$  naturālo skaitļu kopas  $A_1, A_2, \dots, A_m$  izmērā  $n$ . Zināms, ka katrā kopā  $A_i$  nav tādu skaitļu, kas dalītos ar kādu skaitli no  $A_{i+1}$ , un kopā  $A_m$  nav tādu skaitļu, kas dalītos ar kādu skaitli no  $A_1$ . Noteikt lielāko iespējamo skaitļu pāru  $(a, b)$  skaitu, ka  $a$  un  $b$  pieder dažādām kopām  $A_i$  un  $A_j$ , un  $b$  dalās ar  $a$ .