

## Senioru IMO treniņš 5

Šis ir neobligātais treniņš senioru nodarbību dalībniekiem (piedalīties var jebkurš interesēts). Katras divas nedēļas (svētdien) tiks publicēta šāda izlase ar uzdevumiem, uzdevumu sarežģītība ir aptuveni IMO līmeņa uzdevumi vai mazliet vieglāk. Šoreiz ir 4 uzdevumi, pa 1 no katras nozares (ģeometrija, algebra, skaitļu teorija, kombinatorika). Risinājumus vai jautājumus sūtīt uz [jevgenijs.vihrovs@lu.lv](mailto:jevgenijs.vihrovs@lu.lv) līdz (sestdienai) 04.07. 23:59. Katrs uzdevums tiek vērtēts līdz 7 punktiem. Rezultāti tiks publicēti NMS mājaslapā.

**1. uzdevums.** Ar  $\mathbb{Z}^{\geq}$  apzīmēsim visu veselo nenegatīvo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas  $f: \mathbb{Z}^{\geq} \rightarrow \mathbb{Z}^{\geq}$ , kurām ir spēkā

$$f(a + b) = f(a) + f(b) + f(c) + f(d)$$

jebkurai veselo nenegatīvo skaitļu četriniekam  $a, b, c, d$  ar īpašību  $2ab = c^2 + d^2$ .

**2. uzdevums.** Trijstūra  $ABC$  ievilktais un apvilktais riņķa līniju centri ir punktos  $I$  un  $O$ , attiecīgi. Malai  $BC$  pievilktā riņķa līnija pieskaras taisnēm  $AB, AC, BC$  punktos  $K, L, M$ , attiecīgi. Pierādīt, ka, ja nogriežņa  $KL$  viduspunkts atrodas uz trijstūra  $ABC$  apvilktās riņķa līnijas, tad punkti  $I, M, O$  atrodas uz vienas taisnes.

**3. uzdevums.** Atrast visus tādus naturālus skaitļus  $n$ , ka  $n^{n+1} + n - 1$  ir kāda naturāla skaitļa sestā pakāpe.

**4. uzdevums.** Alise un Bobs spēlē spēli, kur viņiem sākumā zināms naturāls skaitlis  $n \geq 2$  un viens žetons. Sākumā Alise izvēlas skaitļu  $1, 2, \dots, n$  permutāciju un pieraksta tos tādā secībā uz lapiņas. Tad Bobs izvēlas vienu skaitli un uzliek uz tā žetonu. Tālāk spēlētāji pēc kārtas veic gājienus, kur vienā gājienā var pabīdīt žetonu uz kādu no blakusesošajiem skaitļiem (sāk Alise). Katram  $k$  no  $1$  līdz  $n$ , žetons uz skaitļa  $k$  var tikt uzlikts ne vairāk kā  $k$  reizes, pie tam Boba pati pirmā uzlikšana arī skaitās. Spēlētājs, kurš nevar veikt gājienus, zaudē. Noteikt visas  $n$  vērtības, pie kurām Alise uzvar (pieņemot, ka abi spēlētāji spēlē optimāli).