# Senioru IMO treniņš 8

Šis ir neobligātais treniņš senioru nodarbību dalībniekiem (piedalīties var jebkurš interesēts). Katras divas nedēļas (svētdien) tiks publicēta šāda izlase ar uzdevumiem, uzdevumu sarežģītība ir aptuveni IMO līmeņa uzdevumi vai mazliet vieglāk. Šoreiz ir 4 uzdevumi, pa 1 no katras nozares (ģeometrija, algebra, skaitļu teorija, kombinatorika). Risinājumus vai jautājumus sūtīt uz jevgenijs.vihrovs@lu.lv līdz (šoreiz svētdienai) 23.08. 23:59. Katrs uzdevums tiek vērtēts līdz 7 punktiem. Rezultāti tiks publicēti NMS mājaslapā.

**1. uzdevums.** Ar $\mathbb{P}$ apzīmēsim visu pirmskaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ tādas, ka visiem $p, q \in \mathbb{P}$ izpildās

$$f(p)^{f(q)} + q^p = f(q)^{f(p)} + p^q.$$

**2. uzdevums.** Doti reāli skaitļi $a, b, c$, kuriem ir spēkā $0 \leq a \leq b \leq c$ un $a + b + c = ab + bc + ca > 0$. Pierādīt, ka

$$(a + 1)\sqrt{bc} \geq 2.$$

Atrodiet arī visus trijniekus $(a, b, c)$, kuriem izpildās vienādība.

**3. uzdevums.** Dots šaurleņķu trijstūris $ABC$. Dots, ka $X$ un $Y$ ir divi atšķirīgi punkti nogriežņa $BC$ iekšienē tādi, ka $\angle CAX = \angle YAB$. Ar $K$ un $S$ apzīmēsim pamatus perpendikuliem no $B$ pret taisnēm $AX$ un $AY$, attiecīgi. Ar $T$ un $L$ apzīmēsim pamatus perpendikuliem no $C$ pret taisnēm $AX$ un $AY$, attiecīgi. Pierādīt, ka $KL$ un $ST$ krustpunkts atrodas uz taisnes $BC$.

**4. uzdevums.** Par *režģi* sauksim punktu $(m, n)$ kopu, kur $m$ un $n$ ir veseli skaitļi, kuriem ir spēkā $|m| \leq 2019$, $|n| \leq 2019$ un $|m| + |n| < 4038$. Punktus $(m, n)$, kuriem vai nu $|m| = 2019$, vai $|n| = 2019$, sauksim par *robežpunktiem*. Četras taisnes $x = \pm 2019$ un $y = \pm 2019$ sauksim par *robežtaisnēm*. Divus režģa punktus sauksim par *kaimiņiem*, ja attālums starp tiem ir 1.

Anna un Bobs spēlē spēli šajā režģī. Sākumā Anna novieto žetonu punktā $(0, 0)$ – tālāk abi spēlē ar šo žetonu. Tad abi spēlētāji alternē gājienus, sāk Bobs.

- Katrā no saviem gājieniem, Bobs izdzēš ne vairāk par diviem robežpunktiem uz katras no robežtaisnēm.
- Katrā no saviem gājieniem, Anna veic tieši trīs *darbības*. Ar katru no šīm darbībām viņa pārbīda žetonu kādā no kaimiņiem (tam punktam, kurā ir žetons), kurš vēl netika izdzēsts.

Tiklīdz Anna novieto žetonu uz kāda no robežpunktiem, kurš vēl netika izdzēsts, spēle beidzas un Anna uzvar. Nosakiet, vai Anna var vinnēt šajā spēlē, ja abi spēlētāji rīkojas optimāli (Bobs grib nepieļaut Annas uzvaru).