"Profesora Cipariņa klubs"

1. nodarbības uzdevumu atrisinājumi

1. Dots, ka a un b ir naturāli skaitļi. Zināms, ka $a + b = 2021$. Pierādiet, ka $a \cdot b$ nedalās ar 2021.

Atrisinājums

Pieņemsim pretējo, ka skaitlis $a \cdot b$ dalās ar 2021. Tā kā $2021 = 43 \cdot 47$ un šie abi ir pirmskaitļi, tad noteikti a vai b jādalās ar kādu no tiem. Pieņemsim, ka a dalās ar 43. Izmantojot to, ka $a + b = 2021$ jeb $a = 2021 - b$, varam secināt, ka arī b dalās 43, jo abām pusēm vienādībā jādalās ar 43 un 2021 arī dalās ar 43. Līdzīgi varam pamatot, ka gan a, gan b dalīsies ar 47, bet tas nozīmē, ka $a \geq 43 \cdot 47 = 2021$. Šis dod mums pretrunu, jo šādā gadījumā tad nav tāda naturāla skaitļa, lai $a + b = 2021$.

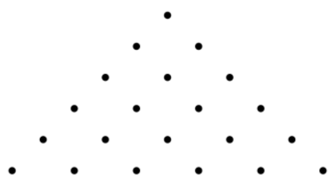
2. Pa riņķi pēc kārtas uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 2020. Skaidris, sākot ar 1, izsvītro pēc kārtas katru otro skaitli no vēl neizsvītrotajiem (sākumā 1 atstāj, 2 izsvītro, 3 atstāj utt.), kamēr paliek tikai viens neizsvītrots skaitlis. Kurš tas ir?

Atrisinājums

Apskatīsim vispirms gadījumu, kad uz tāfeles uzrakstīti tikai skaitļi no 1 līdz 4. Secīgi ejot un izsvītrojot (vispirms 2, tad 4 un visbeidzot 3), paliek ar skaitlis 1. Tagad uzrakstīsim skaitļus no 1 līdz 8. Pēc 4 pirmajiem izsvītrotajiem skaitļiem $(2; 4; 6; 8)$ mēs nonākam gadījumā, ka ir palikuši tikai 4 skaitļi un starta pozīcijā ir atkal skaitlis 1. Šādu situāciju esam jau apskatījuši un varam secināt, ka atkal beigās neizsvītrots paliks skaitlis 1. Šādā veidā mēs varam turpināt ar visām divnieka pakāpē, t.i., 16, 32, 64 utt., un vienmēr iegūt beigās skaitli 1, jo katru reizi mēs induktīvi reducējam uz soli, ko esam jau izpētījuši.

Lai uzzinātu, kurš skaitlis paliks neizsvītrots, mums jānonāk situācijā, kad ir palikuši tikai $1024 = 2^{10}$ skaitļi, jo tad tas skaitlis, ar kuru sāk no tā brīža, būs arī meklētais. Tātad spēlējam pēc noteikumiem un izsvītrojam pirmos $2020 - 1024 = 996$ skaitļus. Tā kā sākumā tiek izsvītroti visi pāra skaitļi, tad 996. skaitlis, ko izsvītros, būs $996 \cdot 2 = 1992$. Šobrīd uz tāfeles ir palikuši 1024 skaitļi un starta pozīcijā mums ir skaitlis 1993. Ņemot vērā iepriekš apspriesto, secinām, ka pēdējais skaitlis, kas uz tāfeles paliks neizsvītrots, būs 1993.

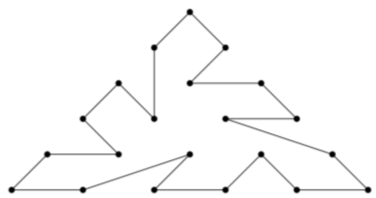
3. Uzzīmējiet slēgtu lauztu līniju, kuras virsotnes ir tieši 1. att. redzamie punkti. Līnija nedrīkst krustot pati sevi, un katra virsotne drīkst piederēt tikai 2 posmiem.



1. att.

Atrisinājums

Skat., piemēram, 2. att.



2. att.

4. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka skaitļi n un n^2 kopā satur visus ciparus, turklāt katru ciparu tieši vienu reizi?

Atrisinājums

Pamatosim, ka tāds skaitlis neeksistē. Ja n būtu trīscipara skaitlis, tad n^2 nesaturēs vairāk par sešiem cipariem ($999^2 = 998001$ – sešciparu skaitlis), un kopā tie saturēs ne vairāk kā 9 ciparus, bet kopā ir 10 iespējami cipari. Ja n ir četrciparu skaitlis, tad n^2 saturēs vismaz septiņus ciparus ($1000^2 = 1000000$ – septiņciparu skaitlis), tad kopumā tie saturēs vismaz 11 ciparus, bet tas nozīmē, ka kādam no tiem būtu jāatkārtojas, bet mēs gribam, lai katrs cipars parādītos tiešu vienu reizi. Secinām, ka tāds naturāls skaitlis n neeksistē.

5. Atrast decimāldaļskaitļa $\frac{2020}{2^{2020}}$ trešo ciparu no beigām.

Atrisinājums

Vispirms vienkāršosim daļu, noīsinot kopīgos reizinātājus. Rezultātā iegūstam $\frac{505}{2^{2018}}$. Šo daļu varam turpināt pārveidot, izmantojot to, ka $10 = 2 \cdot 5$, un iegūt $\frac{505 \cdot 5^{2018}}{10^{2018}}$. Tā kā saucējā parādās tikai desmitnieka pakāpes, tad mums jāatrod cipars, kas parādās skaitļa $505 \cdot 5^{2018}$ simtu pozīcijā, lai atrisinātu uzdevumu. Papētīsim pakāpeniski piecinieka pakāpes.

5^1	005
5^2	025
5^3	$\mathbf{1}25$
5^4	$\mathbf{6}25$
5^5	$\ldots\mathbf{1}25$
5^6	$\ldots\mathbf{6}25$
5^7	$\ldots\mathbf{1}25$
5^8	$\ldots\mathbf{6}25$

Ievērojam, ka pie pietiekoši lielām pakāpēm, ja pakāpe ir pāra skaitlis, tad pēdējie trīs cipari ir 625, bet, ja nepāra skaitlis, tad tie ir 125. Tā kā mēs kāpinām 5^{2018}, tad šim skaitlim pēdējie trīs cipari būs 625. Simtu pozīciju var ietekmēt tikai pēdējie trīs cipari, tāpēc, lai iegūtu rezultējošā skaitļa pēdējos trīs ciparus, jāaprēķina reizinājums $505 \cdot 625 = 315625$. Ievērojam, ka simtu pozīcijā atrodas skaitlis 6, kas arī ir uzdevumā meklētais trešais cipars no beigām decimāldaļskaitlim.