JAUNO MATEMĀTIĶU KONKURSS

2020./2021. mācību gads

1. kārtas uzdevumi un atrisinājumi

1. Desmitciparu skaitlis

No cipariem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 (katru izmanto tieši vienu reizi) izveido desmitciparu skaitli, kas dalās ar visiem skaitļiem no 2 līdz 18 (ieskaitot).

Atrisinājums. Uzdevuma nosacījumiem atbilst, piemēram, skaitlis 2438195760. Pārbaudīsim, ka tas dalās ar visiem skaitļiem no 2 līdz 18 (ieskaitot):

- dalās ar 3 un ar 9, jo skaitļa ciparu summa ir 45;
- dalās ar 2, ar 5 un 10, jo skaitļa pēdējais cipars ir 0;
- dalās ar 4, jo pēdējo divu ciparu veidotais skaitlis ir 60, kas dalās ar 4;
- dalās ar 8, jo pēdējo trīs ciparu veidotais skaitlis ir 760, kas dalās ar 8, jo $760 = 720 + 40$ (katrs saskaitāmais dalas ar 8);
- dalās ar 16, jo pēdējo četru ciparu veidotais skaitlis ir 5760, kas dalās ar 16, jo $5760 = 16 \cdot 360$;
- dalās ar 11, jo pāra vietās esošo ciparu summas un nepāra vietās esošo ciparu summas starpība dalās ar 11, tas ir, $(4 + 8 + 9 + 7 + 0) - (2 + 3 + 1 + 5 + 6) = 28 - 17 = 11$;
- dalās ar 7, jo $2438195760 : 7 = 348313680$;
- dalās ar 13, jo $2438195760 : 13 = 187553520$;
- dalās ar 17, jo $2438195760 : 17 = 143423280$;
- dalās ar 6, jo dalās ar 2 un 3 (savstarpēji pirmskaitļi);
- dalās ar 12, jo dalās ar 3 un 4 (savstarpēji pirmskaitļi);
- dalās ar 14, jo dalās ar 2 un 7 (savstarpēji pirmskaitļi);
- dalās ar 15, jo dalās ar 3 un 5 (savstarpēji pirmskaitļi);
- dalās ar 18, jo dalās ar 2 un 9 (savstarpēji pirmskaitļi).

Piezīme. Pavisam ir četri skaitļi, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, tie ir 2438195760, 3785942160, 4753869120 un 4876391520.

2. Ātrrēķināšanas sacensības

Elīna, Ilze, Maruta un Emīls piedalījās ātrrēķināšanas sacensībās. Elīna ieguva divas reizes vairāk punktus nekā Emīls un par 30 punktiem vairāk nekā Ilze, bet Maruta ieguva par 50 punktiem vairāk nekā Emīls.
Kuri no apgalvojumiem noteikti ir patiesi?

1. Sacensībās uzvarēja Elīna.
2. Sacensībās zaudēja Emīls.
3. Sacensībās uzvarēja Maruta.
4. Ilze ieguva vairāk punktus nekā Emīls.
5. Maruta un Elīna kopā ieguva vairāk punktus nekā Ilze un Emīls kopā.

Atrisinājums. Tā kā Elīna ieguva vairāk punktus nekā Ilze un Maruta ieguva vairāk punktus nekā Emīls, tad Elīna un Maruta kopā noteikti ieguva vairāk punktus nekā Ilze un Emīls kopā. Tātad 5. apgalvojums noteikti ir patiess.
Parādīsim, ka pārējie apgalvojumi var nebūt vienmēr patiesi.
Ja Elīna ieguva 30 punktus, Emīls – 15 punktus, Ilze – 0 punktus un Maruta 65 punktus, tad

1. apgalvojums nav patiess, jo Elīna neuzvarēja;
2. apgalvojums nav patiess, jo Emīls nezaudēja;
4. apgalvojums nav patiess, jo Ilze ieguva mazāk punktus nekā Emīls.

Ja Elīna ieguva 110 punktus, Emīls – 55 punktus, Ilze – 80 punktus un Maruta 105 punktus, tad 3. apgalvojums nav patiess, jo Maruta neuzvarēja.
Līdz ar to esam pamatojuši, ka vienmēr patiess ir tikai 5. apgalvojums.

3. Rotaļu laukums

Kādā ciemā, kurā dzīvo vairāk nekā 100 un mazāk nekā 500 iedzīvotāji, iedzīvotāji nolēma labiekārtot rotaļu laukumu bērniem un katrs iedzīvotājs piekrita iemaksāt vienu un to pašu naudas daudzumu. Pēc visu maksājumu saņemšanas ciema grāmatvedis katram ciema iedzīvotajam nosūtīja vēstuli, ka kopā tika iemaksāti 3062 eiro un 29 centi. Noskaidro, cik ciemā var būt iedzīvotāju un cik katrs no viņiem samaksāja par bērnu laukuma labiekārtošanu!

Atrisinājums. Ievērojam, ka 3062 eiro un 29 centi ir 306229 centi. Lai noskaidrotu, cik iedzīvotāji ir pilsētā un cik katrs no tiem iemaksāja, sadalām šo skaitli reizinātājos $306229 = 7 \cdot 11 \cdot 41 \cdot 97$ (sadalījumu reizinātājos var iegūt, pārbaudot, ar kādiem pirmskaitļiem dalās dotais skaitlis). Ņemot vērā ciema iedzīvotāju skaitu, apskatām gadījumus, kādus divus skaitļus reizinot var iegūt 306229.

- Ja skaitlis, kas atbilst iedzīvotaju skaitam, kā mazāko reizinātāju satur reizinātāju 7, tad tas vēl var saturēt tikai reizinātāju 41, jo $7 \cdot 11 = 77 < 100$ un $7 \cdot 97 = 679 > 500$. Tātad iedzīvotāju skaits varētu būt $7 \cdot 41 = 287$ un katra iedzīvotāja iemaksātā summa ir 1067 centi.
- Ja skaitlis, kas atbilst iedzīvotaju skaitam, kā mazāko reizinātāju satur reizinātāju 11, tad tas vēl var saturēt tikai reizinātāju 41, jo $11 \cdot 97 > 500$. Tātad iedzīvotāju skaits varētu būt $11 \cdot 41 = 451$ un katra iedzīvotāja iemaksātā summa ir 679 centi.
- Skaitlis, kas atbilst iedzīvotāju skaitam, kā mazāko reizinātāju nevar saturēt reizinātāju 41 vai 97, jo $41 \cdot 97 > 500$.

Tātad pilsētā ir 287 vai 451 iedzīvotājs un katrs samaksāja attiecīgi 10 eiro 67 centus vai 6 eiro 79 centus.

4. Rudens veltes

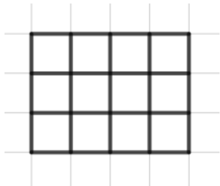
Trīs grozos ir vienāds skaits ābolu. Agnese ābolus grib iedot savām deviņām draudzenēm. Ja viņa katrai draudzenei iedotu $\frac{1}{18}$ no katra groza satura, tad katrā grozā paliktu par 12 āboliem vairāk nekā būtu saņēmusi katra draudzene. Cik ābolu sākumā bija katrā grozā?
Vai var gadīties, ka uzdevuma nosacījumi izpildās, ja Agnesei ir cits draudzeņu skaits?

Atrisinājums. Lai vieglāk risināt uzdevumu, ābolu skaitu katrā grozā apzīmēsim ar $18 \cdot a$. Katra draudzene saņēma $\frac{1}{18}$ no vienā grozā esošajiem āboliem, tātad no viena groza viņa saņēma a ābolus. Tā kā ir trīs grozi, tad katra draudzene kopā saņēma $3 \cdot a$ ābolus.
Ja katrai no deviņām draudzenēm Agnese iedeva $\frac{1}{18}$ no grozā esošajiem āboliem jeb a ābolus, tad kopā no groza tika atdoti $9 \cdot a$ āboli. Līdz ar to grozā palika $9 \cdot a$ āboli.
Starpība starp grozā atlikušajiem āboliem un vienas draudzenes iegūto ābolu skaitu ir $9 \cdot a - 3 \cdot a = 6 \cdot a$ jeb pēc uzdevumā dotā starpība ir 12 āboli. Līdz ar to $6 \cdot a = 12$ jeb $a = 2$.
Tā kā grozā esošo ābolu skaitu apzīmējām ar $18 \cdot a$, tad katrā grozā ir $18 \cdot 2 = 36$ āboli.
Uzdevuma nosacījumi izpildītos, ja Agnesei būtu 3 draudzenes un katrā grozā būtu 18 āboli. Tā kā katrā grozā ir 18 āboli, tad katra draudzene saņemtu 1 ābolu no katra groza, kopā viņa saņemtu 3 ābolus. Pēc ābolu izdalīšanas draudzenēm katrā grozā paliktu $18 - 3 \cdot 1 = 15$ āboli.

5. Taisnes un kvadrāti

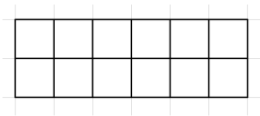
Mazajai Alisei rūtiņu burtnīcā pa rūtiņu līnijām patīk zīmēt taisnes un pēc tam skaitīt, cik kvadrātus var redzēt iegūtajā zīmējumā. Piemēram, 1. att. uzzīmētas deviņas taisnes un var redzēt 20 kvadrātus (12 kvadrāti ar malas garumu 1 vienība, 6 kvadrāti ar malas garumu 2 vienības un 2 kvadrāti ar malas garumu 3 vienības).

a) Uzzīmē vienu taišņu izvietojumu, kurā iegūti tieši 17 kvadrāti!
b) Uzzīmē vienu taišņu izvietojumu, kurā iegūti tieši 100 kvadrāti!
c) Cik kvadrātus var iegūt, ja dotas 10 taisnes?
d) Uzraksti formulu, kā aprēķina iegūto taisnstūru skaitu, ja ir uzzīmētas m horizontālas taisnes un n vertikālas taisnes!

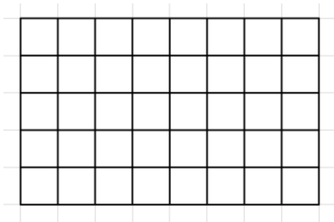


1. att.

Atrisinājums. a) Novelkot 3 horizontālas taisnes un 7 vertikālas taisnes (skat. 2. att.), iegūst tieši 17 kvadrātus (12 kvadrāti 1×1 un 5 kvadrāti 2×2).
b) Novelkot 15 taisnes, kā parādīts 3. att., iegūst tieši 100 kvadrātus (40 kvadrāti 1×1, 28 kvadrāti 2×2, 18 kvadrāti 3×3, 10 kvadrāti 4×4 un 4 kvadrāti 5×5).

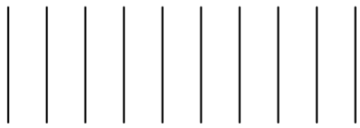
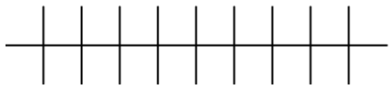
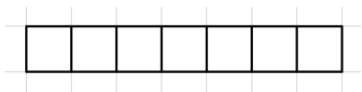
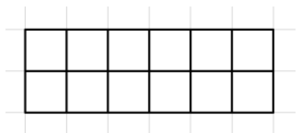
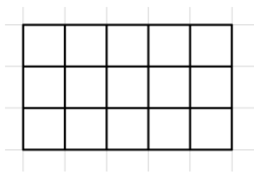
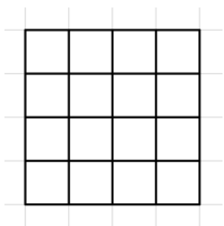


2. att.

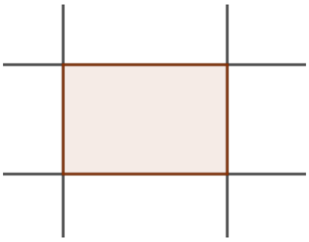


3. att.

c) Ievērojam, ka m vertikālas taisnes un n horizontālas taisnes dod to pašu kvadrātu skaitu kā n vertikālas taisnes un m horizontālas taisnes. Apskatīsim visus gadījumus, kā var tikt novietotas dotās 10 taisnes.

Vertikālo taišņu skaits	Horizontālo taišņu skaits	Taišņu novietojums	Kvadrātu skaits
10	0		0
9	1		0
8	2		7
7	3		17 (12 kvadrāti 1×1 un 5 kvadrāti 2×2)
6	4		26 (15 kvadrāti 1×1, 8 kvadrāti 2×2 un 3 kvadrāti 3×3)
5	5		30 (16 kvadrāti 1×1, 9 kvadrāti 2×2, 4 kvadrāti 3×3 un 1 kvadrāts 4×4)

d) Ievērojam, ka taisnstūri nosaka 2 vertikālas taisnes un 2 horizontālas taisnes (skat. 4. att.).



4. att.

Tātad no n vertikālām taisnēm mums ir jāizvēlas divas taisnes. Pirmo taisni varam izvēlēties n veidos (tas ir, varam ņemt jebkuru no vertikālajām taisnēm) un otro taisni varam izvēlēties $n-1$ veidos (tas ir, varam ņemt jebkuru no atlikušajām $n-1$ vertikālajām taisnēm). Tā kā nav svarīgi, vai mēs vispirms izvēlamies taisni a un tad taisni b vai arī pirmo ņemam taisni b un tad taisni a, tad divas vertikālas taisnes var izvēlēties $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ veidos.

Līdzīgi aprēķina, ka divas horizontālas taisnes var izvēlēties $\frac{m\cdot(m-1)}{2}$ veidos.

Tā kā katram vertikālo taišņu pārim varam piekārtot $\frac{m\cdot(m-1)}{2}$ dažādus horizontālo taišņu pārus, tad taisnstūru skaitu var aprēķināt pēc formulas $\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot\frac{m\cdot(m-1)}{2}$.