Periodiskas virknes

1. Uz tāfeles uzrakstīts skaitlis 61. Katru minūti skaitli nodzēš un tā vietā uzraksta tā ciparu reizinājumu, kam pieskaitīts 13. Kāds skaitlis būs uzrakstīts uz tāfeles pēc stundas?

2. Dota virkne $a_1, a_2, \ldots,$ kurai visiem $n \geq 2$ izpildās $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$. Atrodiet a_{100}, ja $a_1 = 3$ un $a_2 = 7$.

3. Atrast skaitļa 2^{50} pēdējo ciparu.

4. Pierādīt, ka atlikumu virkne, ko iegūst F_i dalot ar 2020 ir

1. periodiska, sākot no kādas vietas

2. periodiska

Šeit $F_1, F_2, \ldots$ ir Fibonači virkne, $F_1 = F_2 = 1$ un $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ visiem naturāliem n.

5. Virknei $\{a_n\}$ ir spēkā sakarība $a_n = n^2$, ja $1 \leq n \leq 5$, un visiem naturāliem n izpildās $a_{n+5} + a_{n+1} = a_{n+4} + a_n$. Aprēķiniet a_{2020}.

6. Dota augoša naturālu skaitļu virkne $a_1, a_2, \ldots,$ kurā visiem naturāliem n izpildās $a_{n+1} \leq 10a_n$. Pierādīt, ka daļa $0, a_1a_2\ldots$, ko iegūst, sarakstot šos skaitļus vienu aiz otra rindā, ir neperiodiska.

7. Divu virkņu mazākie periodi ir attiecīgi 7 un 13. Kāds lielākais sākotnējais gabals tām var sakrist?

8. Doti naturāli skaitļi a un b, zināms, ka a ir nepāra. Virkni $\{u_n\}$ definē šādi: $u_1 = b$ un visiem naturāliem n

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}u_n, & \text{ja } u_n \text{ ir pāra} \\ u_n + a, & \text{ja } u_n \text{ ir nepāra} \end{cases}$$

1. Pierādīt, ka kādam $n \in \mathbb{N}$ izpildīsies $u_n \leq a$.

2. Pierādīt, ka u_n sākot no kādas vietas būs periodiska

9. Dota virkne $a_1, a_2, \ldots$ un zināms, ka katram k var atrast tādu naturālu t, ka

$$a_k = a_{k+t} = a_{k+2t} = a_{k+3t} = \ldots.$$

Vai šī virkne noteikti ir periodiska?

10. Skaitļa $1^1 + 2^2 + \cdots + n^n$ pēdējais cipars ir b_n. Pierādīt, ka virkne $\{b_n\}$ ir periodiska un atrast tās mazāko periodu.

11. Katram naturālam skaitlim n ar a_n apzīmēsim skaitļa n^{n^n} pēdējo ciparu. Pierādīt, ka virkne $\{a_n\}$ ir periodiska un atrast tās mazāko periodu.

12. Dota naturālu skaitļu virkne $a_1, a_2, \ldots,$ zināms, ka a_{n+2} ir skaitļa $a_{n+1}^2 + a_n$ pēdējais cipars visiem naturāliem n. Vai šī virkne noteikti sākot no kādas vietas ir periodiska?

13. Virkni 0110100110010110... iegūst šādi: sākumā uzraksta ciparu 0 un tad katrā solī jau esošajai virknei pieraksta galā tās "invertētu kopiju", t.i. tāda pat garuma virkni, kurā visas nulles aizstātas ar vieniniekiem un otrādi. Vai iegūtā virkne sākot no kādas vietas ir periodiska?

14. Naturālam skaitlim katru sekundi pieskaita vai nu 54 vai 77. Pierādīt, ka kādā brīdī tā pēdējie divi cipari būs vienādi.

Periodiskas funkcijas

15. Vai eksistē tādas periodiskas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ka f minimālais periods ir 2, g minimālais periods ir 6, bet $f + g$ minimālais periods ir 3?

16. Funkcijai $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ piemīt īpašība, ka kādam ω visiem $x \in \mathbb{R}$ izpildās

$$f(x + \omega) = \frac{f(x) - 5}{f(x) - 3}.$$

Pierādīt, ka f ir periodiska.

17. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir periodiska, un virkne $\{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$ satur bezgalīgi daudz dažādus locekļus. Pierādīt, ka f periods ir iracionāls.

18. Funkcijai $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ visiem $x, y \in \mathbb{R}$ izpildās

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y),$$

un zināms, ka eksistē tāds x_0, ka $f(x_0) = -1$. Pierādīt, ka f ir periodiska.

19. Funkcijai $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kādam a visiem $x \in \mathbb{R}$ izpildās

$$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}.$$

Pierādīt, ka f ir periodiska, un dot piemēru šādai funkcijai, ja $a = 1$.

20. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir ierobežota un visiem $x \in \mathbb{R}$ izpildās

$$f(x + \frac{13}{42}) + f(x) = f(x + \frac{1}{6}) + f(x + \frac{1}{7}).$$

Pierādīt, ka f ir periodiska.

Uzdevumi

21. Kādiem naturāliem $n \geq 3$ var atrast tādus reālus skaitļus $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, ka $a_1 = a_{n+1}$, $a_2 = a_{n+2}$ un visiem $1 \leq i \leq n$ ir spēkā

$$a_{i+2} = a_i a_{i+1} + 1?$$

22. Dota bezgalīga naturālu skaitļu virkne $a_1, a_2, \ldots$. Zināms, ka eksistē tāds naturāls N, ka visiem $n > N$ vērtība

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

ir naturāls skaitlis. Pierādīt, ka eksistē tāds naturāls skaitlis M, ka $a_n = a_{n+1}$ visiem $n > M$.

23. Katram veselam skaitlim a_0 aplūkosim virkni $a_0, a_1, a_2, \ldots$, kurā visiem naturāliem n

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{ja } \sqrt{a_n} \text{ ir naturāls skaitlis} \\ a_n + 3, & \text{ja } \sqrt{a_n} \text{ nav naturāls skaitlis} \end{cases}.$$

Atrodiet visas a_0 vērtības, kurām eksistē tāds skaitlis A, ka $a_n = A$ bezgalīgi daudzām n vērtībām.

24. Dota virkne $a_1, a_2, a_3, \ldots$, kurai $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ un visiem $n \geq 1$ ir spēkā

$$a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n, & \text{ja } a_n a_{n+1} \text{ ir pāra skaitlis,} \\ a_{n+1} - a_n, & \text{ja } a_n a_{n+1} \text{ ir nepāra skaitlis.} \end{cases}$$

Pierādiet, ka $a_n \neq 0$ visiem naturāliem n.